

Sobre a Utilização de uma Inversão Numérica para a Determinação da Pressão em um Reservatório Compartimentado de Óleo

Evandro de Farias Vogas

Engenharia Mecânica, Instituto Politécnico, UERJ, Brasil.

Grazione de Souza

Departamento de Modelagem Computacional, Instituto Politécnico, UERJ, Brasil.

Helio Pedro Amaral Souto

Departamento de Modelagem Computacional, Instituto Politécnico, UERJ, Brasil.

Abstract: Oil reservoirs are underground rock formations that store hydrocarbons before production begins. In general, reservoirs are heterogeneous. This fact, among others, makes it difficult to obtain analytical solutions to the partial differential equations that govern the flow in the reservoir. However, in some cases, there are analytical solutions even for heterogeneous porous media, such as compartmentalized reservoirs. In these structures, there are bounded regions with different rock properties, such as absolute permeability. In this work, we implemented one of these solutions, following the developments of Carter (1966) [7], using Laplace transform and applying other types of approximations for modified Bessel functions. We also used the Stehfest algorithm to obtain the solution in the time domain, and we performed a sensitivity analysis changing different parameters and properties associated with the flow and the geometry of the compartmentalized reservoir.

Keywords: analytical solution, compartmentalized reservoir, Laplace transform, Stehfest's algorithm.

Corresponding author: Helio Pedro Amaral Souto, helio@iprj.uerj.br

Received: 16 Oct 2022 / Accepted: 20 Oct 2022 / Published: 06 Nov 2022.

1 Introdução

A produção de petróleo no mundo depende, apesar das características específicas de cada local, da existência de três elementos básicos: reservatório, poço e instalações de superfície [14]. Os reservatórios são as formações rochosas subterrâneas, nas quais os hidrocarbonetos encontram-se armazenados. Essas formações podem apresentar, em geral, variações espaciais em termos das propriedades da rocha, as quais influenciam sobremaneira na produção de óleo e gás. Neste contexto, um dos casos de interesse da indústria do petróleo é a produção a partir de reservatórios compartimentados.

1.1 Produção de petróleo e reservatórios compartimentados

O petróleo, fonte de energia relevante na matriz energética mundial, tem origem no processo de transformação da matéria orgânica que foi acumulada nas rochas sedimentares. Portanto, existe uma rocha, denominada geradora, rica em matéria orgânica, que em algum momento no passado foi submetida a condições de pressão e temperatura elevadas. Após a sua geração, os hidrocarbonetos, na forma de fluidos, migram até alcançar as estruturas que permitem a sua acumulação e aprisionamento. Eles ocorrem nas rochas reservatórios, em contraposição à rocha selante (impermeável), por exemplo, que faz fronteira com o reservatório, através da qual não há movimentação de fluido. O processo de migração depende da variação da pressão na rocha geradora e ocorre, geralmente, através de falhas geológicas [15].

O petróleo é um recurso natural não renovável, de extrema importância para as atividades humanas em de-

corrência do atual modo de vida em sociedade. Em função das bem conhecidas desigualdades existentes no planeta, houve ao longo dos séculos XX e XXI disputas geopolíticas devido à sua importância energética estratégica. A sua disponibilidade esteve e está diretamente relacionada ao crescimento e ao desenvolvimento econômico de vários países. Deve-se destacar que além de ser uma fonte de energia, o petróleo também é um insumo para a indústria petroquímica, sendo utilizado em diversos tipos de processos industriais e produtos [41]. O cenário de dependência do petróleo, atrelado aos problemas ambientais advindos da sua exploração e consumo, tem levado a esforços para a ampliação da utilização de fontes renováveis e, na indústria petrolífera, ao uso do gás natural. No entanto, o papel do óleo combustível ainda apresenta uma importância considerável no momento atual.

De fato, devido à sua necessidade como fonte de energia e insumo, diversas áreas de pesquisa & desenvolvimento têm sido integradas em um esforço conjunto para aumentar a exploração e a produção das reservas existentes. Neste sentido, a engenharia de reservatórios é o ramo da indústria de petróleo e gás que tem como objetivo otimizar o planejamento do desenvolvimento de campos de hidrocarbonetos, buscando alcançar uma maior produtividade que seja economicamente viável [18]. Para tanto, modelos que descrevam o escoamento em meios porosos são fundamentais para a previsão do comportamento dos fluidos no interior dos reservatórios [9]. Eles podem ser experimentais, analíticos ou numéricos [17]. No caso dos modelos analíticos e numéricos, em geral, em alguma etapa da modelagem, deve-se lidar com um conjunto de equações diferenciais parciais (EDPs) que governam o escoamento dos fluidos nos reservatórios. Elas incorporam os fenômenos físicos oriundos dos efeitos viscosos, difusivos, térmicos e de compressibilidade [30].

No caso de modelos analíticos, hipóteses simplificadoras são adotadas devido ao fato de as EDPs, presentes nos modelos, serem tipicamente não lineares [12, 13, 25]. No entanto, esforços têm sido realizados, ao longo do tempo, para que novas soluções sejam obtidas através de técnicas analíticas ou semi-analíticas [16, 29, 40, 44], até mesmo para certos problemas não-lineares [1, 26, 38, 43]. As soluções analíticas para modelos de escoamento em reservatórios de petróleo são utilizadas, por exemplo, no entendimento da dinâmica dos efeitos advindos das mudanças de parâmetros físicos, na verificação de resultados de simuladores numéricos, para casos simplificados, e na área da análise de testes de pressão em poços.

Na realização de um teste de pressão [4, 23, 45], os poços produzem, por exemplo, a uma vazão constante, em condições de superfície, e registra-se a pressão no poço por meio de um equipamento denominado registrador de pressão, em função do tempo de produção transcorrido. Estes testes podem ser de diferentes tipos [4] e pode-se citar, por exemplo, aquele que envolve o registro da pressão durante a produção (fluxo, sendo usado na indústria o termo drawdown) e no período seguinte ao fechamento do poço (estática, comumente chamado de buildup). De posse dos dados da variação da pressão

em função do tempo, de um modelo para o escoamento (analítico, semi-analítico ou numérico) e de parte dos parâmetros do modelo, a partir de uma técnica de solução de problemas inversos é possível se estimar alguma propriedade não previamente conhecida. Portanto, via os testes de pressão, é possível se determinar, por exemplo, a presença de heterogeneidades [16, 24, 39] e a compartimentação dos reservatórios [22, 31, 32].

Quando o fluxo no interior do reservatório é impedido devido à existência de barreiras, ocorre um fenômeno de segregação e o conseqüente acúmulo de petróleo em vários compartimentos individuais, os quais podem ter diferentes propriedades de rocha. Elas são causadas por fatores geológicos e levam à retenção do petróleo. Chama-se de selos estáticos quando a região encontra-se completamente selada e de selos dinâmicos quando elas são apenas defletoras do escoamento reduzindo, assim, o fluxo mássico dos hidrocarbonetos. Assim, a compartimentação do reservatório produz um impacto nos volumes de óleo e/ou gás que podem ser produzidos em dado período. Em alguns casos, a produção pode vir a ser restringida. Na Figura 1, apresenta-se uma ilustração esquemática de um reservatório compartimentado. Uma introdução aos reservatórios compartimentados pode ser encontrada na referência [22].

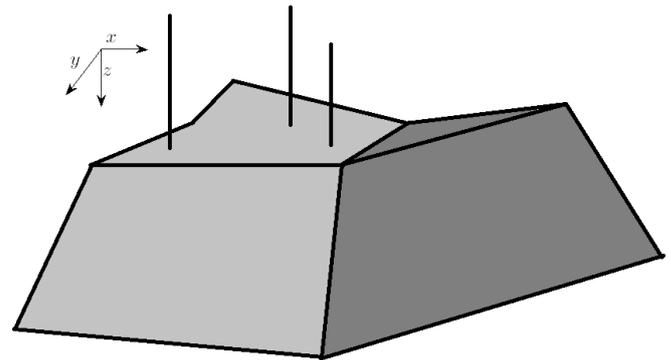


Figura 1: Reservatório com duas regiões compartimentadas. As linhas pretas verticais representam as localizações dos poços produtores. Fonte: os autores.

Estudos sobre o escoamento em reservatórios compartimentados já vêm sendo realizados há algumas décadas. Por exemplo, Carter (1966) [7] desenvolveu uma solução analítica para o caso do escoamento em um reservatório compartimentado cilíndrico. A solução é obtida mediante o uso de variáveis adimensionais, da transformada de Laplace e da avaliação das funções modificadas de Bessel por meio de polinômios. Aproximações são utilizadas na determinação da transformada inversa, de modo a se obter a solução no domínio real. Os resultados são apresentados na forma de curvas de pressão no poço e no reservatório em função do tempo de produção.

Por outro lado, Smalley et al. (2010) [34] mostraram o impacto da compartimentalização do reservatório na recuperação do petróleo, destacando a importância de se identificar a sua extensão a partir do uso de soluções analíticas. Os autores também levantaram a questão da

existência de escalas de tempo diversas para que ocorra o equilíbrio das condições de pressão e composição reinantes nos reservatórios. O objetivo deles foi o de determinar quais propriedades que poderiam auxiliar na identificação da compartimentação.

O estudo da geoquímica dos reservatórios parece, de fato, ser uma disciplina fundamental na discussão da compartimentação dos reservatórios. Chuparova et al. (2010) [8] descreveram como a integração da geoquímica orgânica com os dados sísmicos 4D pode ser usada para melhorar a compreensão da “comunicação” dos fluidos dentro de reservatórios de petróleo. Segundo os autores, a análise estatística, da evolução das composições dos fluidos em função do tempo, fornece evidências sobre a mistura gradual de óleo e de condensado entre duas unidades do reservatório, as quais esperava-se estarem separadas antes do início da produção. Os resultados das análises forneceram as bases para o aprimoramento da estratégia de produção. Shukairi (2019) [33], também com o uso da geoquímica, apresentou dados geoquímicos de vinte amostras de óleo que foram utilizados para investigar a compartimentação horizontal e vertical do Campo Jawdah, localizado no sul de Omã. Os dados destinavam-se a identificar as causas da segmentação dos reservatórios.

Um modelo analítico, para o estudo do desempenho de reservatórios compartimentados, também foi desenvolvido por Shahamat et al. (2014) [32]. Ele foi utilizado para analisar a produção em reservatórios não-convencionais, considerando a existência de fraturas e de poços horizontais, de forma a poder estimar a existência do volume estimulado de um dado reservatório. De acordo com os autores, o modelo também pode ser aplicado na análise de reservatórios convencionais compartimentados e o estudo forneceu uma nova visão sobre a utilização de dados de produção nesses reservatórios.

Em contrapartida, Sun et al. (2020) [36] utilizaram um modelo matemático, para um reservatório compartimentado cilíndrico, na avaliação de testes de poço, levando em conta que nos processos de recuperação de óleo os limites físicos entre os compartimentos, no modelo de escoamento, podem ser funções do tempo. Assim, eles empregaram soluções analíticas para a determinação da pressão, em um reservatório contendo fronteiras móveis delimitando os compartimentos, considerando o efeito da estocagem de poço e do dano à formação. Além disso, foram estudadas as características do regime transiente de pressão no reservatório e a influência de parâmetros tais como a posição inicial da fronteira entre os compartimentos e a velocidade de deslocamento da fronteira móvel. Tal como Carter (1966) [7], uma solução analítica para o cálculo da pressão foi obtida utilizando variáveis adimensionais, a transformada de Laplace e a avaliação de funções modificadas de Bessel. No entanto, a inversão da transformada de Laplace, para o domínio real, é feita numericamente [20, 35].

2 Escoamento isotérmico monofásico em meios porosos

Trata-se, agora, da modelagem do escoamento isotérmico monofásico em um meio poroso. Inicialmente, faz-se uma breve introdução da lei de Darcy, que é a equação mais utilizada para expressar o balanço da quantidade de movimento no escoamento em meios porosos. Em seguida, foca-se no balanço de massa e no seu uso conjunto com a lei de Darcy. Por fim, obtém-se a equação diferencial parcial governante em coordenadas cilíndricas, em termos da pressão, para o escoamento de um óleo ligeiramente compressível.

2.1 A lei de Darcy

Comumente, a conservação da quantidade de movimento no escoamento em meio poroso é verificada se a velocidade superficial é dada pela lei empírica proposta, em 1856, pelo engenheiro Henry Darcy [11]. Atualmente conhecida como a lei de Darcy, ela foi obtida, de forma pioneira, por meio de experimentos de transporte de água em filtros de areia. Sendo assim, foi possível concluir que a vazão no meio poroso depende da variação de pressão, do comprimento do meio poroso e das características do sistema fluido/meio poroso. Mais tarde, essa lei pôde ser deduzida teoricamente. Por exemplo, reporte-se ao trabalho de Whitaker (1999) [42].

No caso monofásico, a lei de Darcy clássica, na sua forma diferencial [2] é dada por

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu}(\nabla p - \rho g \nabla Z), \quad (1)$$

onde \mathbf{v} é a velocidade superficial, \mathbf{k} é o tensor de permeabilidade absoluta do meio poroso, μ é a viscosidade do fluido, p é a pressão, ρ é a massa específica do fluido, g é a magnitude da aceleração da gravidade e Z é a profundidade.

A lei de Darcy clássica é estritamente válida sob as seguintes hipóteses [17]:

1. fluido homogêneo e newtoniano, escoamento laminar e monofásico;
2. permeabilidade independente da pressão, da temperatura e do fluido;
3. ausência de reações químicas entre a rocha e o fluido;
4. ausência de escorregamento (efeito Klinkenberg);
5. ausência de efeitos eletrocinéticos.

2.2 Balanço de massa

A partir da conservação de massa é possível se obter, para o escoamento monofásico em meio poroso [17],

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) - q_m = 0, \quad (2)$$

onde $\phi = V_p/V_b$ é a porosidade efetiva, V_p é o volume poroso dos poros interconectados, V_b é o volume total e q_m representa um termo de fonte/sorvedouro (massa por unidade de tempo por unidade de volume).

2.3 Equação governante do escoamento

De forma a se obter uma EDP cuja variável dependente é a pressão, no caso do escoamento isotérmico monofásico em meio poroso, a lei de Darcy é utilizada em conjunto com a conservação de massa. Nesse processo, como o fluido e a rocha são ligeiramente compressíveis, faz-se necessário introduzir as compressibilidades. A compressibilidade da rocha, c_ϕ , é dada por

$$c_\phi = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p}, \quad (3)$$

de forma que, para uma compressibilidade pequena e constante, tem-se que a rocha é ligeiramente compressível e, segundo [17], é possível utilizar

$$\phi = \phi^0 [1 + c_\phi(p - p^0)], \quad (4)$$

onde ϕ^0 é a porosidade de referência medida na pressão de referência p^0 .

Por sua vez, a compressibilidade isotérmica do fluido, c , é dada por [30]

$$c = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T \quad (5)$$

onde T é a temperatura e V é o volume específico que a fase ocupa na pressão e na temperatura do reservatório. Quando a massa específica varia linearmente com a pressão tem-se um fluido ligeiramente compressível, que é o caso do óleo aqui considerado [30].

A indústria do petróleo utiliza o Fator-Volume-Formação (FVF) para converter o volume, na pressão e na temperatura do reservatório, no volume correspondente nas condições de superfície, ou seja, nas condições padrão de pressão, p_{sc} , e de temperatura, T_{sc} [10]. Então, o FVF é o volume que a fase ocupa na pressão e na temperatura do reservatório dividido pelo volume que a mesma ocupa em condições padrão, V_{sc} ,

$$B = \frac{V}{V_{sc}} = \frac{\rho_{sc}}{\rho} \quad (6)$$

onde ρ_{sc} é a massa específica em condições padrão.

Para um óleo ligeiramente compressível [17],

$$B = \frac{B^0}{1 + c(p - p^0)}, \quad (7)$$

onde B^0 é o FVF de referência medido na pressão de referência p^0 .

Portanto, a partir da combinação da Lei de Darcy clássica e da equação da continuidade, obtém-se uma equação de transporte para a fase óleo que, após ser resolvida, torna possível a determinação da distribuição de

pressão no meio poroso. Assim, substituindo-se a Eq. (1) na Eq. (2),

$$\nabla \cdot \left[\frac{\rho}{\mu} \mathbf{k} (\nabla p - \gamma \nabla Z) \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) - q_m. \quad (8)$$

Agora, como $\rho = \rho_{sc}/B$ e o termo fonte pode ser reescrito como $q_{sc} = q_m/\rho_{sc}$, da Eq. (8) obtém-se, após divisão por ρ_{sc} [19],

$$\nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{k}}{\mu B} (\nabla p - \gamma \nabla Z) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) - q_{sc}, \quad (9)$$

e, caso sejam desconsiderados os efeitos gravitacionais,

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{k} \nabla p}{\mu B} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) - q_{sc}. \quad (10)$$

Por outro lado, do termo de acúmulo, considerando-se que $\phi = \phi(p)$ e $B = B(p)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) &= \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= \phi \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{B} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{d\phi}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} \\ &= \left[\phi \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{B} \right) + \frac{1}{B} \frac{d\phi}{dp} \right] \frac{\partial p}{\partial t}. \end{aligned} \quad (11)$$

Da Eq. (11) e utilizando-se as relações (4) e (7), pode-se reescrever a Eq. (10) na forma

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{k} \nabla p}{\mu B} \right) = \left(\frac{\phi c}{B^0} + \frac{\phi^0 c_\phi}{B} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (12)$$

e, para um escoamento unidimensional na direção do eixo x , sem a presença de termo fonte,

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \left(\frac{\phi c}{B^0} + \frac{\phi^0 c_\phi}{B} \right) \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (13)$$

onde considerou-se que a permeabilidade é constante e isotrópica, em cada região compartimentada, e que a viscosidade do fluido não varia. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{B} \right) \\ &= \frac{1}{B} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left(\frac{c}{B^0} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

e, como a compressibilidade do fluido é pequena, despreza-se o termo quadrático [30] e substituí-se a Eq. (14) na Eq. (13),

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\mu B}{k} \left(\frac{\phi c}{B^0} + \frac{\phi^0 c_\phi}{B} \right) \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (15)$$

Em seguida, a partir das equações fornecidas para a determinação da porosidade e do FVF em função da pressão, Eqs. (4) e (7), reescreve-se a Eq. (14) na forma

$$\frac{\mu B}{k} \left(\frac{\phi c}{B^0} + \frac{\phi^0 c_\phi}{B} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\mu \phi}{k} \left\{ \frac{c}{[1 + c(p - p^o)]} \right\} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\mu \phi}{k} \left\{ \frac{c_\phi}{[1 + c_\phi(p - p^o)]} \right\} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (16)$$

e assume-se que os valores de $c(p - p^o)$ e $c_\phi(p - p^o)$ não são elevados [30] e introduz-se a compressibilidade total $c_T = (c + c_\phi)$. Por último, substituindo-se a Eq. (16) na Eq. (15) obtém-se

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \left(\frac{\mu \phi c_T}{k} \right) \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (17)$$

Neste trabalho, a solução analítica empregada é obtida baseada na hipótese de que o reservatório é cilíndrico e o escoamento unidimensional se dá na direção radial [27]. Assim sendo, a equação governante, Eq. (17), é escrita em termos da coordenada radial

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (18)$$

onde η é dado por

$$\eta = \frac{k}{\phi \mu c_T}. \quad (19)$$

Para que o problema descrito pela Eq. (19) seja bem posto, necessita-se fornecer ainda as condições inicial e de contorno. Em se tratando da primeira, para um instante de tempo inicial arbitrário t_0 , ela é dada por

$$p(r, t_0) = p_i, \quad (20)$$

onde p_i é a pressão inicial reinante no reservatório.

A especificação de diferentes combinações de condições de contorno leva a diferentes modelos de escoamento. Uma condição de pressão é prescrita em r igual ao raio do poço, $r = r_w$. Por outro lado, nas fronteiras externas, uma condição de contorno do tipo Dirichlet implica uma pressão prescrita na fronteira. Esse tipo de condição de contorno ocorre em reservatórios constantemente alimentados por um forte influxo devido à existência de um aquífero, de forma que a pressão na fronteira entre o reservatório e o aquífero possa ser considerada constante [17]. Quando prescreve-se o fluxo mássico através das fronteiras do reservatório, tem-se uma condição do tipo Neumann. Caso ele seja nulo, tem-se que as fronteiras são impermeáveis, ou seja, não há passagem de fluido através delas, de forma que o gradiente de pressão também deve ser imposto como sendo nulo [17]. A especificação de um fluxo normal à fronteira corresponde à prescrição de um gradiente de pressão normal à fronteira.

3 Determinação da pressão em um reservatório compartimentado

Esta seção é dedicada à modelagem do escoamento e à obtenção da solução analítica. Na Seção 3.1, baseando-se

no conteúdo apresentado por Carter (1966) [7], descreve-se o modelo para o escoamento em um reservatório compartimentado cilíndrico, contendo zonas concêntricas com diferentes permeabilidades absolutas. Em seguida, na Seção 3.2, aborda-se a estratégia de obtenção da solução, fundamentada nas contribuições de Cariello (2019) [6], utilizando uma inversão numérica da transformada de Laplace, via o Algoritmo de Stehfest, e uma avaliação polinomial para as funções modificadas de Bessel.

3.1 Solução analítica para o cálculo da pressão em um reservatório compartimentado

A Figura 2 ilustra, esquematicamente, um reservatório compartimentado formado por duas regiões concêntricas, descritas como Zonas 1 e 2, que possuem permeabilidades absolutas k_1 e k_2 , respectivamente. A configuração é a mesma que a adotada por Carter (1966) [7]. O modelo apoia-se na hipótese da fonte sendo representada por uma linha, na qual o raio do poço é considerado muito menor do que o raio externo do reservatório. Ainda na figura, as Zonas 1 e 2, respectivamente, são delimitadas pelos raios r_1 e r_2 . O reservatório possui uma fronteira interna em contato com o poço produtor, $r = r_w$, e uma fronteira externa em $r = r_2$, impermeável ao escoamento.

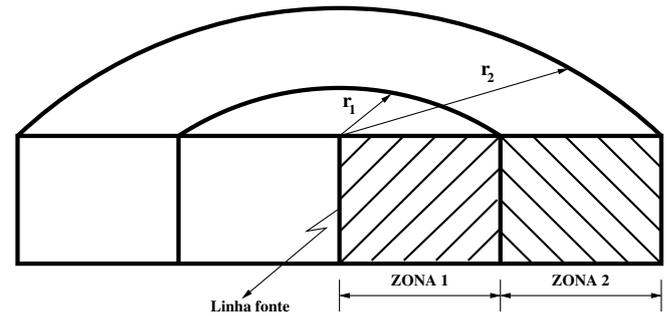


Figura 2: Reservatório compartimentado. Fonte: os autores.

Para um raio r qualquer, tal que $r_w \leq r \leq r_2$, introduz-se uma adimensionalização para a coordenada radial na forma

$$r_D = \frac{r}{r_2} \quad (21)$$

e, analogamente, para a fronteira entre os dois compartimentos,

$$r_{D1} = \frac{r_1}{r_2} \quad (22)$$

enquanto que para o raio externo,

$$r_{D2} = \frac{r_2}{r_2} = 1. \quad (23)$$

Na busca pela determinação das pressões nos compartimentos, Carter (1966) [7] definiu a variável

$$F_k = \frac{k_1}{k_2} \quad (24)$$

que representa o contraste entre os valores das permeabilidades nos dois compartimentos.

Ao invés de se determinar a pressão no reservatório propriamente dita, busca-se avaliar a sua diferença de pressão em relação à pressão inicial, estratégia muito utilizada na engenharia de reservatórios [27, 30],

$$\Delta p(r, t) = p_i - p(r, t). \quad (25)$$

ou ainda, nas suas formas adimensionais [7],

$$\Delta p_{D1}(r_D, t_D) = \left(\frac{2\pi k_1 h}{q\mu B} \right) \Delta p_1(r, t) \quad (26)$$

e

$$\Delta p_{D2}(r_D, t_D) = \left(\frac{2\pi k_1 h}{q\mu B} \right) \Delta p_2(r, t) \quad (27)$$

respectivamente para os Compartimentos 1 e 2, onde h é a espessura do reservatório, q é o termo de fonte superficial que fornece a vazão através da fronteira entre o poço e o reservatório e, por sua vez, o tempo adimensional é definido por [7]

$$t_D = \left(\frac{k_1}{\phi\mu cr_2^2} \right) t. \quad (28)$$

Portanto, para o problema em questão, as equações que governam o escoamento nas Zonas 1 e 2 são [7]

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial}{\partial r_D} \Delta p_{D1} \right) = \frac{\partial}{\partial t_D} \Delta p_{D1}, \quad (29)$$

para $0 < r_D \leq r_{D1}$ e, para $r_{D1} \leq r_D \leq 1$,

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial}{\partial r_D} \Delta p_{D2} \right) = F_k \frac{\partial}{\partial t_D} \Delta p_{D2}. \quad (30)$$

As seguintes condições de contorno, em termos das variáveis adimensionais, são prescritas:

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} \left(r_D \frac{\partial}{\partial r_D} \Delta p_{D1} \right) = -1, \quad (31)$$

para a produção em $r = r_w$,

$$\frac{\partial}{\partial r_D} \Delta p_{D1}(r_{D1}, t_D) = \frac{1}{F_k} \frac{\partial}{\partial r_D} \Delta p_{D2}(r_{D1}, t_D) \quad (32)$$

e

$$\Delta p_{D1}(r_{D1}, t_D) = \Delta p_{D2}(r_{D1}, t_D), \quad (33)$$

na interface comum aos compartimentos, e

$$\frac{\partial}{\partial r_D} \Delta p_{D2}(1, t_D) = 0 \quad (34)$$

para o raio externo do reservatório.

Como condição inicial, impõe-se

$$\Delta p_{D1}(r_D, 0) = \Delta p_{D2}(r_D, 0) = 0. \quad (35)$$

Segundo Carter (1966) [7], a solução geral para as diferenças de pressão, no domínio de Laplace (subscrito L), nas Zonas 1 e 2 são dadas por

$$\Delta p_{D1L}(r_D, s) = \frac{\mathcal{A}}{s} K_0(r_D \sqrt{s}) + \frac{\mathcal{B}}{s} I_0(r_D \sqrt{s}) \quad (36)$$

e

$$\Delta p_{D2L}(r_D, s) = \frac{\mathcal{C}}{s} K_0(r_D \sqrt{s F_k}) + \frac{\mathcal{D}}{s} I_0(r_D \sqrt{s F_k}), \quad (37)$$

onde s é o parâmetro de frequência (um número complexo), \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} e \mathcal{D} são constantes a serem determinadas e K_0 , K_1 , I_0 e I_1 representam as funções modificadas de Bessel [27, 28].

Da teoria apresentada em Ozkan (2008) [27], para o escoamento em um reservatório cilíndrico, sem compartimentos, a partir da aplicação da transformada de Laplace à equação governante (levando em conta a condição inicial), é possível escrever a EDP correspondente em termos da pressão no domínio de Laplace e ela assume a forma de uma equação modificada de Bessel. Sabe-se que tal equação possui uma solução geral dada por uma expressão similar às das Eqs. (36) e (37) [6, 27], na qual os coeficientes que multiplicam as funções modificadas de Bessel devem ser determinados mediante o uso das condições de contorno. Esse mesmo tipo de procedimento é aqui utilizado [7].

De acordo com Hurst (1960) [21], \mathcal{A} deve ser igual a 1 em função da condição de produção adotada. Dessa forma, a partir das Eqs. (36) e (37) e das condições de contorno é possível escrever o sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} I_0(r_{D1} \sqrt{s}) - \mathcal{C} K_0(r_{D1} \sqrt{s F_k}) \\ + \mathcal{D} I_0(r_{D1} \sqrt{s F_k}) = -K_0(r_{D1} \sqrt{s}), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} I_1(r_{D1} \sqrt{s}) + \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{F_k}} K_1(r_{D1} \sqrt{s F_k}) \\ - \frac{\mathcal{D}}{\sqrt{F_k}} I_1(r_{D1} \sqrt{s F_k}) = K_1(r_{D1} \sqrt{s}) \end{aligned} \quad (39)$$

e

$$-\mathcal{C} K_1(\sqrt{s F_k}) + \mathcal{D} I_1(\sqrt{s F_k}) = 0 \quad (40)$$

que uma vez resolvido nos fornecerá os valores de \mathcal{B} , \mathcal{C} e \mathcal{D} .

Prosseguindo, uma vez conhecidos os valores das três constantes, soluções do sistema (38)–(40), é possível obter sequencialmente as diferenças de pressão para os Compartimentos 1 e 2 no domínio de Laplace,

$$\Delta p_{D1L} = \frac{K_0(r_D\sqrt{s})}{s} \frac{I_0(r_D\sqrt{s})}{s} \cdot \left\{ \left[\frac{-K_0(r_{D1}\sqrt{s}) \Delta_{22}}{I_0(r_{D1}\sqrt{s}) \Delta_{22} + I_1(r_{D1}\sqrt{s}) \Delta_{11}} \right] + \left[\frac{K_1(r_{D1}\sqrt{s}) \Delta_{11}}{I_0(r_{D1}\sqrt{s}) \Delta_{22} + I_1(r_{D1}\sqrt{s}) \Delta_{11}} \right] \right\} \quad (41)$$

$$\Delta p_{D2L} = \frac{1}{s} \left\{ \left[\frac{K_0(r_{D1}\sqrt{s}) I_1(r_{D1}\sqrt{s})}{I_0(r_{D1}\sqrt{s}) \Delta_{22} + I_1(r_{D1}\sqrt{s}) \Delta_{11}} \right] + \left[\frac{K_1(r_{D1}\sqrt{s}) I_0(r_{D1}\sqrt{s})}{I_0(r_{D1}\sqrt{s}) \Delta_{22} + I_1(r_{D1}\sqrt{s}) \Delta_{11}} \right] \right\} \Delta_{33} \quad (42)$$

onde

$$\Delta_{11} = K_0(r_{D1}\sqrt{sF_k}) I_1(\sqrt{sF_k}) + I_0(r_{D1}\sqrt{sF_k}) K_1(\sqrt{sF_k}) \quad (43)$$

$$\Delta_{22} = \frac{1}{\sqrt{F_k}} \left[K_1(r_{D1}\sqrt{sF_k}) I_1(\sqrt{sF_k}) \right] - \frac{1}{\sqrt{F_k}} \left[I_1(r_{D1}\sqrt{sF_k}) K_1(\sqrt{sF_k}) \right] \quad (44)$$

e

$$\Delta_{33} = I_1(\sqrt{sF_k}) K_0(r_D\sqrt{sF_k}) + K_1(\sqrt{sF_k}) I_0(r_D\sqrt{sF_k}). \quad (45)$$

Como as diferenças de pressão nas Zonas 1 e 2, no domínio real, são dadas por

$$\Delta p_1(r, t) = \frac{q\mu B}{2\pi k_1 h} \Delta p_{D1}(r_D, t_D) \quad (46)$$

e

$$\Delta p_2(r, t) = \frac{q\mu B}{2\pi k_1 h} \Delta p_{D2}(r_D, t_D), \quad (47)$$

precisa-se obter a transformada inversa, do domínio de Laplace para o domínio real, dos valores de Δp_{D1L} e Δp_{D2L} . Carter (1966) [7] usou séries de potência para realizar a inversão da transformada de Laplace e obter as diferenças no domínio real. Entretanto, aqui, optou-se por seguir a linha de trabalho proposta por Cariello (2019) [6] e Oliveira (2019) [26], que usaram uma técnica de inversão numérica.

3.2 Implementação computacional da solução analítica

As funções modificadas de Bessel $I_0(z)$, $I_1(z)$, $K_0(z)$ e $K_1(z)$, para $0 \leq z \leq 3$, são crescentes e decrescentes dependendo do argumento z . É evidente que o cálculo dos seus valores, nas Eqs. (41) e (42), é primordial que se possa chegar às diferenças de pressão nos compartimentos do reservatório. Conforme já mencionado, a avaliação das funções modificadas de Bessel foi feita com uso das rotinas desenvolvidas por Cariello (2019) [6]. Por sua vez, elas foram adaptadas por Vogas (2021) [37], tomando por base o material apresentado na referência [28], onde os códigos foram escritos utilizando o tipo float.

Segundo Cariello (2019) [6], em uma implementação idêntica à sugerida em [28], as funções modificadas de Bessel podem ser calculadas para valores máximos dos argumentos aproximadamente iguais a 95. Entretanto, quando elas foram usadas na determinação da pressão nos poços, em algumas das soluções analíticas e em alguns casos surgiram ruídos nas transformadas inversas. Tal fato prejudicou a obtenção de alguns dos valores necessários para a construção dos gráficos especializado e diagnóstico, normalmente utilizados na análise de testes de pressão de poços [5].

Uma alternativa, para a eliminação dos ruídos, foi declarar as variáveis como sendo do tipo double, o que elevou o limite máximo do valor do argumento para próximo de 600 [6]. Esse aumento foi importante, viabilizando a obtenção das soluções para os instantes de tempos iniciais. Assim, foi possível um maior detalhamento quando da sua análise em certos testes de pressão [4]. Isso ocorre uma vez que para os maiores valores de s obtém-se o comportamento da pressão para períodos de tempo mais curtos.

Por fim, um outro diferencial deste trabalho, com relação àquele de Carter (1966) [7], é que a transformada inversa é obtida numericamente. A principal motivação para o seu uso é o fato de que, para certos escoamentos de interesse da indústria do petróleo, não existem tabeladas as transformadas inversas para todas as funções no domínio de Laplace presentes na soluções analíticas. Bem entendido que, em alguns casos, existem aproximações que podem ser feitas, ainda no domínio de Laplace, que permitem a inversão sem uso de uma estratégia numérica [7]. Entretanto, neste trabalho, optou-se pelo uso do algoritmo de Stehfest [35], que é suficientemente acurado para ser empregado em uma série de problemas na engenharia de petróleo [6]. Nesse algoritmo tem-se que

$$F(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^N V_i F_L\left(\frac{\ln 2}{t} i\right) \quad (48)$$

onde $F_L(s)$ é a função conhecida no espaço de Laplace e N é a quantidade de termos empregados na inversão. Em problemas de escoamento na engenharia de petróleo utiliza-se os valores pares no intervalo $6 \leq N \leq 18$ e V_i pode ser calculado de acordo com o número de termos via a expressão

$$V_i = (-1)^{(N/2)+i}$$

$$\cdot \sum_{k=(i+1)/2}^{\min(i, N/2)} \frac{k^{N/2} (2k)!}{[(N/2) - k]! k! (k-1)! (i-k)! (2k-i)!} \quad (49)$$

Na Tabela 1, são apresentados os valores de V_i , para $N = 10$ [3], que devem ser utilizados quando do cálculo de $F(t)$ na Eq. (48) (Δp_1 ou Δp_2) sabendo que $F_L(s)$ será Δp_{1L} ou Δp_{2L} dependendo do compartimento considerado.

Tabela 1 Coeficientes V_i para $N = 10$

V_i	Valor
V_1	0,08333
V_2	-32,08333
V_3	1279,0
V_4	-15623,666
V_5	84244,1666
V_6	-236957,5
V_7	375911,666
V_8	-340071,666
V_9	164062,5
V_{10}	-32812,5

Duas versões foram codificadas e implementadas para a determinação das funções no domínio de Laplace e a inversão numérica da transformada de Laplace:

1. para a determinação das diferenças de pressão em função do tempo em uma dada posição dentro da Zona 1 e em uma determinada localização dentro da Zona 2;
2. para a avaliação das diferenças de pressão ao longo da direção radial, para todo o reservatório, e para um dado tempo.

4 Resultados

Nesta seção, apresenta-se os resultados obtidos, com os códigos numéricos implementados, para as diferenças de pressão nas regiões compartimentadas correspondentes às Zonas 1 e 2. Eles são oriundos da análise de sensibilidade que foi empreendida mediante a variação de alguns dos principais parâmetros do escoamento.

Na Tabela 2, são apresentados os dados utilizados na construção de um caso padrão de escoamento, a partir do qual serão realizadas alterações pontuais quando da realização da análise de sensibilidade. Os parâmetros r_{in} e r_{out} indicam, respectivamente, as posições das Zonas 1 e 2 quando utiliza-se a solução para dadas posições nos Compartimentos 1 e 2, respectivamente, em função do tempo. O tempo máximo de escoamento é indicado pela variável t_{max} . No espaço de Laplace, os valores de s são determinados usando a expressão $s_{n+1} = f_{\Delta s} s_n$ até que

o número de passos seja igual a n_{max} , sabendo que $s_1 = s_{ini}$. Quando as diferenças de pressão são fornecidas para um tempo fixo, o valor da variável é mantida igual a s_{fixo} .

Tabela 2 Parâmetros para a definição do caso padrão

Parâmetro	Valor	Unidade
c	$1,00^{-7}$	Pa^{-1}
c_ϕ	$1,00^{-10}$	Pa^{-1}
$f_{\Delta s}$	1,05	-
h	20	m
k_1	$1,00^{-13}$	m^2
k_2	$1,00^{-12}$	m^2
n_{max}	80	-
N	10	-
q	$1,00^{-2}$	std m^3/s
r_{in}	250	m
r_{out}	750	m
r_w	0,10	m
r_1	500	m
r_2	1000	m
s_{ini}	10	-
s_{fixo}	10	-
t_{max}	11	dias
μ	0,001	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
ϕ	0,20	-

Foram realizadas mais de 120 execuções do aplicativo desenvolvido, de maneira a se poder reproduzir e discutir sobre os perfis relatados por Carter (1966) [7]. Na etapa de pós-processamento, trabalhou-se com um total de mais de 40 gráficos, dentre os quais foram escolhidos os que são aqui exibidos. A escolha fundamentou-se na apresentação dos resultados com o maior potencial para suscitar as discussões mais relevantes.

4.1 Variação de pressão nos compartimentos

Os primeiros resultados analisados encontram-se na Figura 3. Nela, tem-se os perfis da diferença de pressão no reservatório obtidos para um tempo de produção igual a 0,2326 dia e para diferentes valores da espessura da formação produtora (h).

Observa-se que quanto menor a espessura, como a vazão é constante e pré-fixada, ocorre uma maior variação de pressão. Fica clara a existência de duas regiões com diferentes comportamentos para a queda de pressão, sendo que ela é mais acentuada onde a permeabilidade absoluta é menor. O ponto de mudança (inflexão), como esperado, encontra-se na posição r_1 , que indica a fronteira de separação entre as zonas compartimentadas. Cabe ainda ressaltar que, a partir dos valores numéricos, verificou-se que também acontece uma variação de pressão na Zona 2, menos acentuada em relação à Zona 1, apesar de no gráfico ver-se praticamente linhas quase retas.

Já na Figura 4, tem-se o comportamento da diferença de pressão em função da variação da viscosidade.

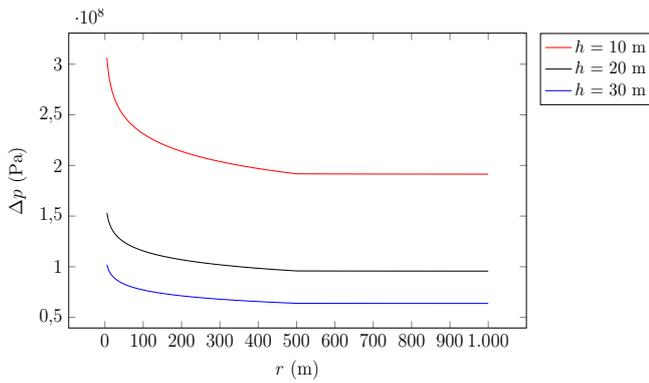


Figura 3: Δp no reservatório em função da variação de h . Fonte: os autores.

Nesse caso, sabe-se que quanto maior for a viscosidade do fluido, maior será a resistência ao escoamento. Como a vazão de produção é fixa, a maior queda de pressão ocorre para o maior valor da viscosidade analisado. Isso se traduz nos diferentes perfis determinados para as duas zonas e a separação entre elas também pode ser identificada na figura.

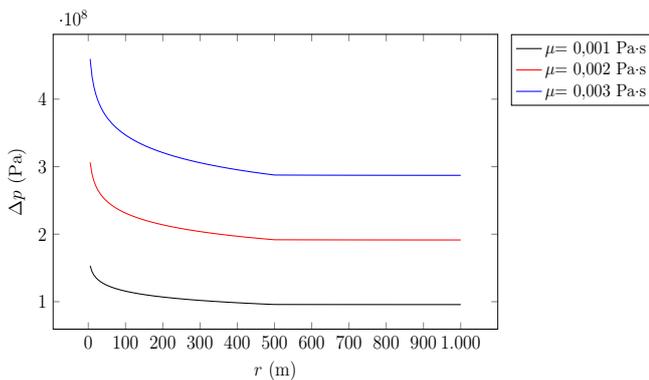


Figura 4: Δp no reservatório em função da variação de μ . Fonte: os autores.

Em seguida, é retratada a variação da queda de pressão em função da variação da vazão, Figura 5. Como pode ser visto, as maiores quedas de pressão estão associadas aos valores mais elevados da vazão, lembrando que ela é estabelecida via a condição de contorno interna em r_w . Tal variação também pode ser explicada à luz da lei de Darcy, uma vez que multiplicando-se ela por uma área A obtém-se uma expressão para o cálculo da vazão. Assim, tendo-se em mente que a vazão foi fixada, aos maiores gradientes de pressão estarão associados os maiores valores de vazão.

Os casos mostrados anteriormente são de cunho geral e podem ser reproduzidos para outros escoamentos em meio poroso, a menos do comportamento diferenciado proveniente da existência das zonas (compartimentos) no reservatório. Passa-se, então, às avaliações específicas de interesse, ainda no âmbito do estudo da variação da diferença de pressão ao longo do reservatório. A primeira delas trata da modificação do parâmetro r_1 , ou seja, da

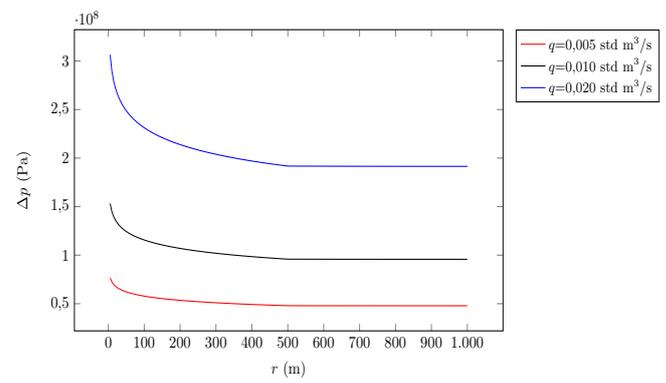


Figura 5: Δp no reservatório em função da variação de q . Fonte: os autores.

posição da separação entre as duas zonas do reservatório, Figura 6. Da figura, nota-se que a influência da mudança na posição de separação foi capturada. Distingue-se claramente as díspares taxas de variação de pressão provocadas pela diferença entre os valores das permeabilidades absolutas k_1 e k_2 representativas das Zonas 1 e 2, respectivamente. Quanto maior r_1 maior será a influência do valor da permeabilidade k_1 na dinâmica do escoamento e vice-versa.

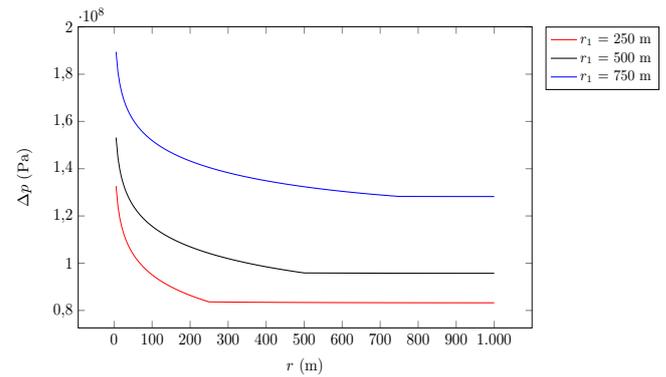


Figura 6: Δp no reservatório com a variação de r_1 . Fonte: os autores.

Prosseguindo, quis-se ressaltar na análise o efeito do contraste entre os valores das permeabilidades absolutas k_1 e k_2 das duas zonas. Então, as Figuras 7 e 8 contêm os resultados para a variação da diferença de pressão no reservatório levando em conta diferentes tempos de produção, vide a Tabela 3, e valores das permeabilidades absolutas. Foi estipulado que os valores delas diferem entre si de um fator igual a 200.

Tabela 3 Tempos para as análises de variação de Δp

Tempo de escoamento	Valor (dias)
t_1	0,1861
t_2	0,2326
t_3	0,2791

Na Figura 7, mantém-se o padrão dos testes anteriores, mas considera-se que $k_2 < k_1$, ou seja, o valor de

k_1 é o dado na Tabela 2 enquanto que k_2 é 200 vezes menor. Em consequência, tem-se perfis similares aos já obtidos, mas com uma queda de pressão variando a uma taxa mais acentuada na Zona 2, ao invés da Zona 1, como tinha sido observado anteriormente. Fica evidente, à medida que o tempo evolui, que as variações da diferença de pressão, nas duas zonas, vão aumentando. Na Zona 2, surgem variações de pressão com gradientes mais severos, em decorrência do menor valor de k_2 .

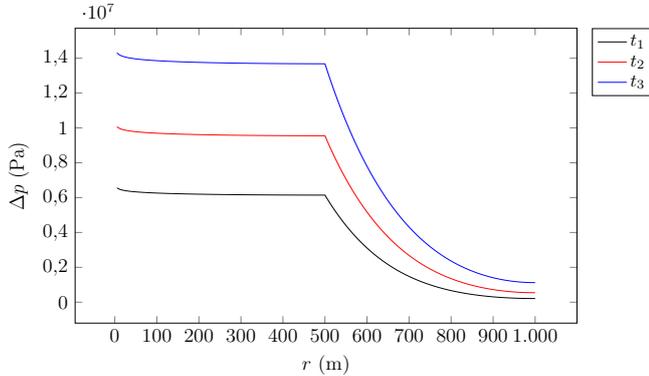


Figura 7: Δp no reservatório para $k_2 < k_1$ e diferentes tempos. Fonte: os autores.

Por outro lado, na Figura 8 encontram-se os valores calculados para as mesmas condições à exceção de que agora os valores de k_1 e k_2 são os da Tabela 2, ou seja, $k_1 < k_2$. Agora, os maiores gradientes de pressão estão associados à Zona 1, quando eles são comparados aos da Zona 2. Além disso, mais uma vez o aumento do tempo de produção levou a uma maior variação da pressão no meio poroso, em função da maior extração de fluido (com a consequente perda de energia na jazida).

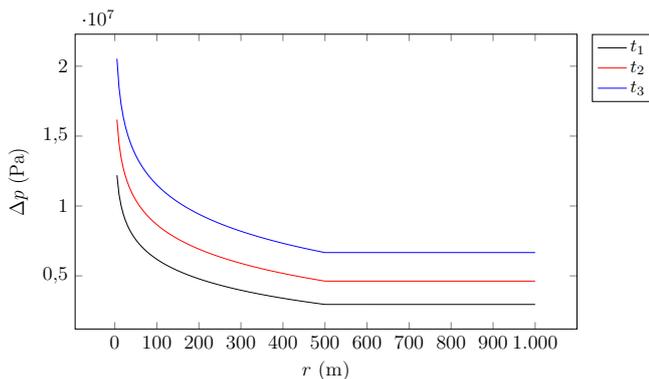


Figura 8: Δp no reservatório para $k_1 < k_2$ e diferentes tempos. Fonte: os autores.

Ainda com relação aos valores da permeabilidade absoluta, na Figura 9 vê-se os resultados para a variação unicamente de k_1 . Nota-se que há uma influência significativa na mudança da variação de pressão, com as curvas apresentando um deslocamento vertical, para cima, à medida que os valores da permeabilidade k_1 são reduzidos. Trata-se do efeito direto da maior resistência ao

deslocamento do fluido, no interior do reservatório, que ocorre quando se diminui o valor da permeabilidade absoluta. Constata-se, também, que a Zona 2 possui um perfil de queda de pressão praticamente constante em relação ao da Zona 1.

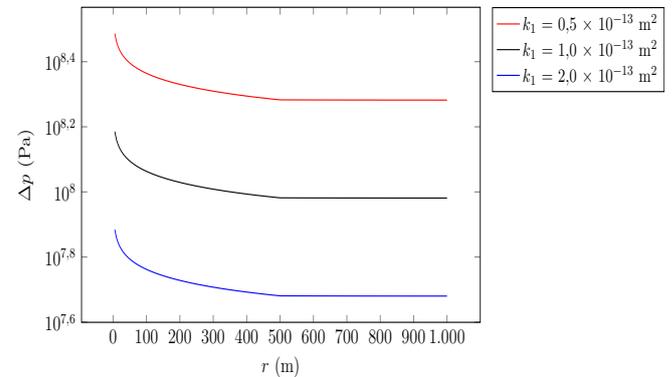


Figura 9: Δp no reservatório diferentes valores de k_1 . Fonte: os autores.

Encerrando as análises considerando as variações da diferença de pressão ao longo da direção radial, a Figura 10 mostra os resultados para três valores da permeabilidade absoluta k_2 . Nela, verifica-se que houve uma mudança nos perfis tanto da Zona 1 quanto da Zona 2. Na região próxima ao poço produtor, as curvas encontram-se menos espaçadas verticalmente na Zona 1 quando comparadas às suas correspondentes na Figura 9. Um menor valor de k_2 está associado a maiores variações de pressão, ainda que os gradientes na Zona 2 tenham permanecido mais suaves do que os da Zona 1. As mudanças na Zona 1 fazem sentido devido ao acoplamento do sistema e ao fato de que o mesmo volume foi produzido, uma vez que a vazão de produção é constante em r_w . Então, os menores valores da permeabilidade levam aos maiores gradientes de pressão, de modo a que se mantenha a vazão de produção constante.

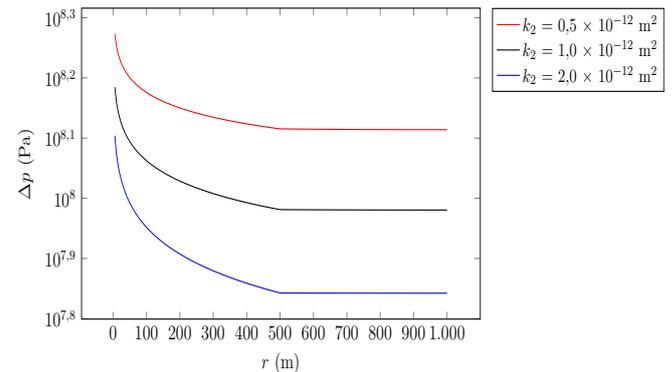


Figura 10: Δp no reservatório para diferentes valores de k_2 . Fonte: os autores.

4.2 Variação da pressão em função do tempo

Passa-se, agora, à análise da variação de pressão em função do tempo transcorrido e para as duas posições de

referência r_{in} ($r = 250$ m) e r_{out} ($r = 750$ m), que caracterizam as Zonas 1 e 2, respectivamente.

As Figuras 11 e 12 contêm os resultados relativos às posições r_{in} e r_{out} para diferentes valores de r_1 , que delimitam a extensão da Zona 1. Os perfis apresentados nas duas figuras são muito parecidos, embora as maiores variações de pressão estejam presentes na Zona 1. Deve-se atentar para o fato de que quanto maior a região da Zona 1, maior valor da permeabilidade absoluta, menor será a variação de pressão.

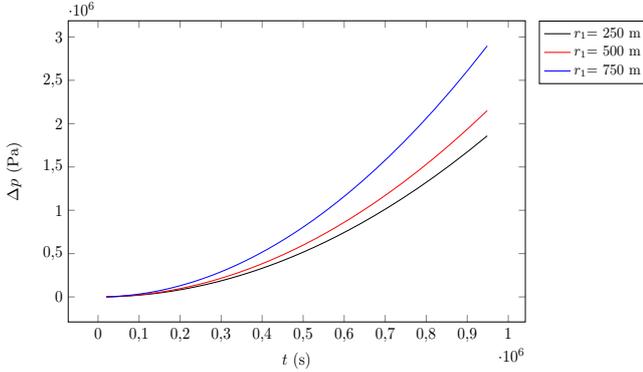


Figura 11: Δp no reservatório variando-se r_1 e para $r = 250$ m. Fonte: os autores.

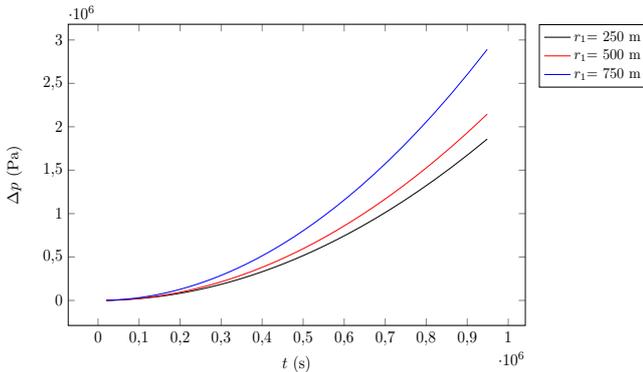


Figura 12: Δp no reservatório variando-se r_1 e para $r = 750$ m. Fonte: os autores.

Em contrapartida, as Figuras 13 e 14 referem-se aos resultados das variações da queda de pressão no limite externo do reservatório, ou seja, para r_{in} e r_{out} .

Analisando, então, para os diferentes instantes de tempo (segundos), é possível constatar que aos maiores valores de r_2 correspondem as menores variações de pressão e é uma consequência da maior quantidade de fluido disponível para a produção. Os perfis das curvas das Figuras 13 e 14 são qualitativamente semelhantes entre si e, novamente, da inspeção dos valores dos arquivos de saída comprovou-se que eles não são os mesmos.

Repetiu-se, também, os testes de variação da vazão de produção e os resultados podem ser vistos na Figura 15 para o raio r igual a 250 m, enquanto que na Figura 16 ele assume o valor de 750 m. Assim como no caso precedente, pode-se afirmar que o comportamento encontrado

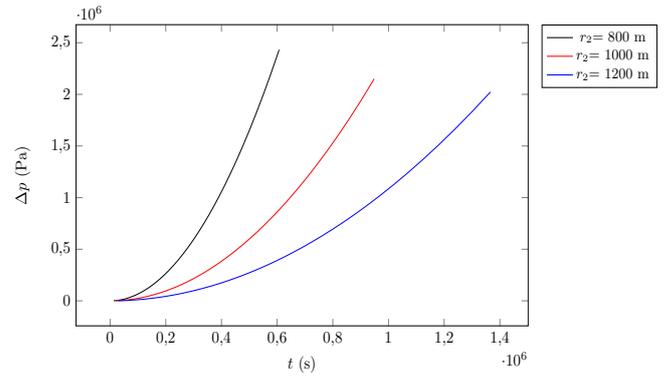


Figura 13: Δp no reservatório variando-se r_2 e para $r = 250$ m. Fonte: os autores.

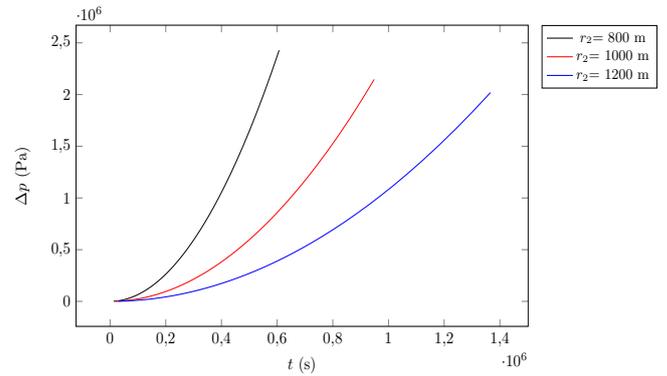


Figura 14: Δp no reservatório variando-se r_2 e para $r = 750$ m. Fonte: os autores.

é basicamente o mesmo em ambas as figuras, destacando-se a correta captura da física do escoamento, já que as maiores variações de pressão foram constatadas para as maiores vazões de produção.

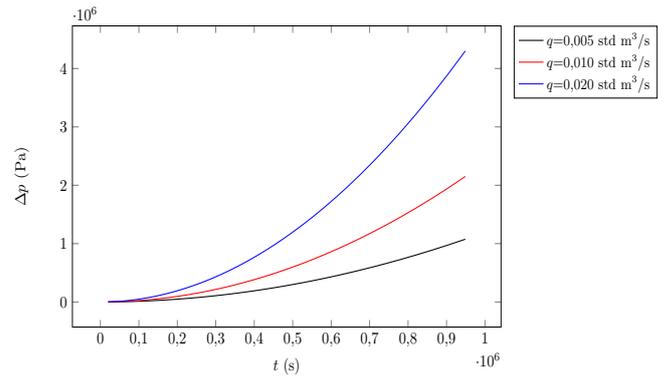


Figura 15: Δp no reservatório variando-se q e para $r = 250$ m. Fonte: os autores.

A fim de estudar-se a influência da espessura h da jazida produtora de hidrocarbonetos na queda de pressão, desta vez considerou-se que as duas posições de referência, para os raios delimitando as Zonas 1 e 2, são $r = 250$ e 750 m, respectivamente. As curvas das diferenças de pressão versus o tempo encontram-se nas Figuras 17 e 18.

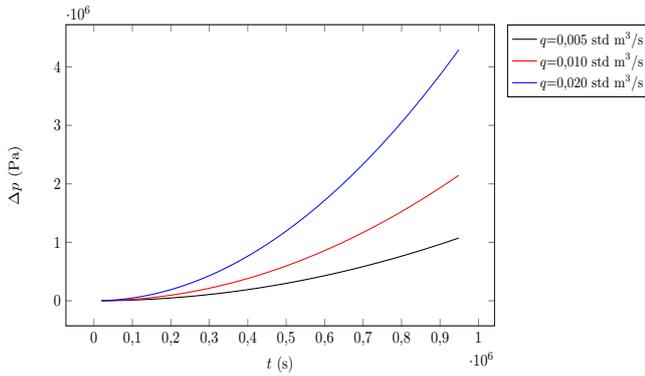


Figura 16: Δp no reservatório variando-se q e para $r = 750$ m. Fonte: os autores.

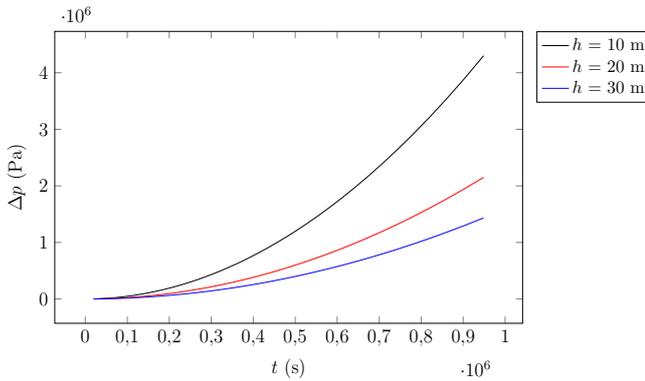


Figura 17: Δp no reservatório variando-se h e para $r = 250$ m. Fonte: os autores.

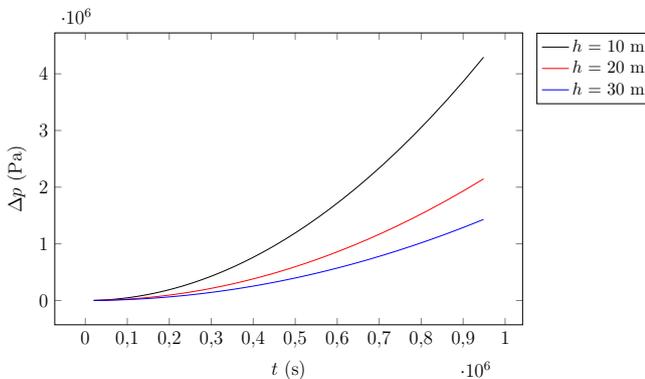


Figura 18: Δp no reservatório variando-se h e para $r = 750$ m. Fonte: os autores.

Reforça-se, mais uma vez, que os resultados são qualitativamente parecidos, sendo que percebe-se uma maior variação de pressão quando a espessura da formação é menor, de modo similar ao que pôde ser visto na análise da condição de contorno em $r = r_w$ e pelo fato de que um maior valor de h resulta em uma maior área disponível para o escoamento (como a vazão é fixa, tem-se uma redução do gradiente de pressão).

Por fim, as Figuras 19 e 20 contêm as curvas de Δp determinadas para diferentes posições de referência das Zonas 1 e 2 e fazendo-se variar os valores da porosi-

dade da rocha (a qual possui o mesmo valor nas duas zonas). Como ela também influencia na adimensionalização, acontece o mesmo problema apontado anteriormente, para a variação de r_2 , e, portanto, os instantes de tempo correspondentes não são os mesmos.

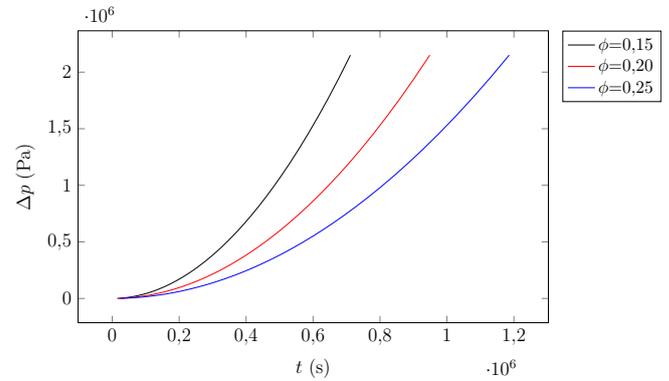


Figura 19: Δp no reservatório variando-se ϕ e para $r = 250$ m. Fonte: os autores.

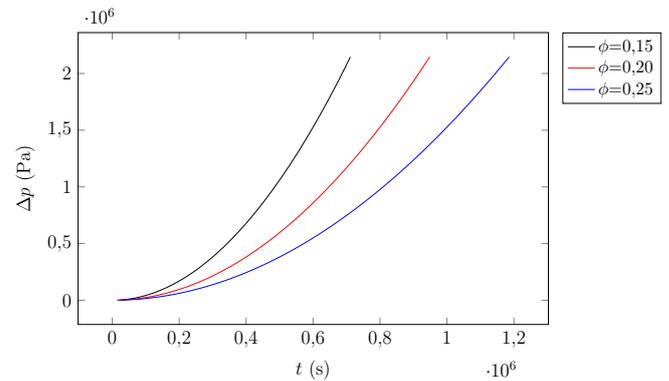


Figura 20: Δp no reservatório variando-se ϕ e para $r = 750$ m. Fonte: os autores.

Considerando os tempos para os quais as três curvas possuem registros de variação de pressão, percebe-se que para os menores valores da porosidade a queda de pressão será mais acentuada para o mesmo valor do tempo. Esse comportamento está de acordo com a física do escoamento em um meio poroso, visto que existirá menos fluido disponível para o escoamento quando a porosidade for menor.

5 Conclusões

Neste trabalho, a partir das contribuições de Carter (1966) [7] e Cariello (1997) [6], implementou-se uma ferramenta computacional para a determinação da variação de pressão, em reservatórios compartimentalizados cilíndricos, a partir da solução analítica no espaço de Laplace. No entanto, as aproximações utilizadas na avaliação das funções modificadas de Bessel, neste trabalho, diferem das empregadas por Carter (1966) [7] e, além

disso, valeu-se de uma abordagem numérica para se obter a transformada inversa de Laplace, ao invés da aproximação por séries utilizada pelo autor.

Realizou-se uma análise de sensibilidade a partir da mudança de alguns dos parâmetros do modelo físico-matemático para o escoamento estudado, incluindo as propriedades de rocha e de fluido, a geometria e a vazão de produção. Destaca-se que as tendências observadas estão condizentes com o esperado para o escoamento e de acordo com os resultados apresentados em Carter (1966) [7]. Deve-se notar que as condições de acoplamento entre as variações de pressão nas duas zonas foram implementadas corretamente, uma vez que não se identificou a presença de descontinuidades na solução em r_1 e tão pouco foi notada alguma alteração nos perfis que estivessem em desacordo com o usual para este tipo de escoamento.

Ressalta-se que as variações dos parâmetros diretamente relacionados à compartimentalização, a razão entre as permeabilidades absolutas das duas zonas e o raio r_1 , resultaram em mudanças significativas na evolução da dinâmica do escoamento. Menores variações de pressão, no limite externo r_2 , estão relacionadas a um maior valor da permeabilidade absoluta quando r_1 é maior. Em contrapartida, as menores variações de pressão encontram-se no limite externo r_2 , de forma que o escoamento pudesse se dar em direção ao poço produtor (onde há a maior queda de pressão). No que diz respeito aos gradientes de pressão, as mudanças nas regiões interiores ocorreram em função das modificações em k_1 , k_2 e r_1 .

Não foram detectados problemas relacionados ao uso da inversão numérica via o método de Stehfest ou pelo uso das funções modificadas de Bessel conforme implementadas em Cariello (2019) [6]. Com relação às variações de pressão ao longo do tempo, para os raios de referência das Zonas 1 e 2, acredita-se que o conjunto de dados adotado não favoreceu o surgimento de maiores disparidades nos resultados. Portanto, outras avaliações precisariam ser realizadas, por exemplo, com maiores valores dos raios externos e menores valores das permeabilidades absolutas, a fim de que a análise do escoamento pudesse contemplar os regimes transientes iniciais.

6 Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer o suporte financeiro fornecido pela FAPERJ.



Referências

[1] R. G. Agarwal. Real gas pseudo-time: A new function for pressure buildup analysis of MHF gas

wells. Paper SPE 8279 presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Las Vegas, NV, 23-26 September 1979.

- [2] M. Aziz and A. Settari. Petroleum Reservoir Simulation. Elsevier Applied Science, New York, USA, 1979.
- [3] T. Blasingame. Lecture notes in fluid flow in reservoirs. <http://www.pe.tamu.edu/blasingame/data>, 2000. Texas A&M University.
- [4] D. Bourdet. Well Test Analysis: the Use of Advanced Interpretation Models. Handbook of Petroleum Exploration and Production 3. Elsevier, Amsterdam, 2002.
- [5] D. Bourdet, J. A. Ayoub, and Y. M. Pirard. Use of pressure derivative in well-test interpretation. SPE Formation Evaluation, pages 293–302, 1989.
- [6] I. C. Cariello. Aplicação de inversão numérica em soluções analíticas para a determinação de pressões em poços de óleo. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2019.
- [7] R. D. Carter. Pressure behavior of a limited circular composite reservoir. Society of Petroleum Engineers Journal, 6(4):328–334, 1966.
- [8] E. Chuparova, T. Kratochvil, J. Kleingeld, P. Bilinski, C. Guillory, J. Bikun, and R. Djojoseparto. Integration of time-lapse geochemistry with well logging and seismic to monitor dynamic reservoir fluid communication: Auger field case-study, deep water Gulf of Mexico. Reservoir Compartmentalization, page 25–41, 2010.
- [9] Holger Class. Models for Non-Isothermal Compositional Gas-Liquid Flow and Transport in Porous Media. Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwissenschaften der Universität Stuttgart, Stuttgart, Germany, 2007.
- [10] A. Y. Dandekar. Petroleum Reservoir Rock and Fluid Properties. CRC Press, USA, 2013.
- [11] H. Darcy. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau. Victor Dalmont, 1856.
- [12] P. Daripa and S. Dutta. Modeling and simulation of surfactant–polymer flooding using a new hybrid method. Journal of Computational Physics, (335):249–282, 2017.
- [13] A. Davletbaev, L. Kovaleva, and T. Babadagli. Mathematical modeling and field application of heavy oil recovery by radio-frequency electromagnetic stimulation. Journal of Petroleum Science and Engineering, pages 646–653, 2011.

- [14] G. de Souza. Acoplamento Poço-reservatório na Simulação Numérica de Reservatórios de Gás. Tese de Doutorado, Universidade Estadual do Norte Fluminense, Macaé, Brasil, 2013.
- [15] Geologia do Petróleo. Petroleum science technology. Technical report, 2010. www.pgt.com.br.
- [16] X. Du, Z. Lu, D. Li, Y. Xu, P. Li, and D. Lu. A novel analytical well test model for fractured vuggy carbonate reservoirs considering the coupling between oil flow and wave propagation. Journal of Petroleum Science and Engineering, 173:447–461, 2019.
- [17] T. Ertekin, J.H. Abou-Kassem, and G.R. King. Basic Applied Reservoir Simulation. Society of Petroleum Engineers, Richardson, USA, 2001.
- [18] N. Ezekwe. Petroleum Reservoir Engineering Practice. Prentice Hall, Westford, USA, 2010.
- [19] M. M. Freitas, P. T. Honório Junior, G. Souza, and H. P. Amaral Souto. Simulação de escoamentos bifásicos em reservatórios de petróleo utilizando uma formulação segregada implícita. Encontro Nacional de Modelagem Computacional, João Pessoa, Brazil, 2016.
- [20] H. Hassanzadeh and M. Pooladi-Darvish. Comparison of different numerical Laplace inversion methods for engineering applications. Applied Mathematics and Computation, 189:1966–1981, 2007.
- [21] W. Hurst. Interference between oil fields. Trans. AIME, 219:175–192, 1960.
- [22] S. J. Jolley, Q. J. Fisher, R. B. Ainsworth, P. J. Vrolijk, and S. Delisle. Reservoir Compartmentalization. Geological Society, London, UK, 2010.
- [23] M. M. Kamal, S. Morsy, F. Suleen, Y. Pan, A. Dastan, M. R. Stuart, E. Mire, and Z. Zakariya. Determination of in-situ reservoir absolute permeability under multiphase-flow conditions using transient well testing. SPE Reservoir Evaluation & Engineering, 22(1):1–15, 2019.
- [24] H. Kazemi. Pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution. SPE Journal, 9(4):451–462, 1969.
- [25] S. Lacroix, Y. V. Vassilevski, J. A. Wheeler, and M. F. Wheeler. Iterative solution methods for modeling multiphase flow in porous media fully implicitly. SIAM J. Sci. Comput., 3(25):905–926, 2003.
- [26] R. C. Oliveira. Aplicação de inversão numérica em soluções analíticas para a pressão no escoamento em reservatórios de gás natural. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2019.
- [27] E. Ozkan. Applied Mathematics of Fluid Flow in Porous Media. 2008.
- [28] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, New York, USA, 2 edition, 1992.
- [29] K. Qiu and H. Li. A new analytical solution of the triple-porosity model for history matching and performance forecasting in unconventional oil reservoirs. SPE Journal, 23(6):1–20, 2018.
- [30] A. J. Rosa, R. S. Carvalho, and J. A. D. Xavier. Engenharia de Reservatórios de Petróleo. Interciência, Rio de Janeiro, Brasil, 2006.
- [31] A. Satman, M. Eggenschwiler, and H. J. Jr. Ramey. Interpretation of injection well pressure transient data in thermal oil recovery. SPE California Regional Meeting, Los Angeles, California, USA, 1980.
- [32] M. S. Shahamat, H. Hamdi, L. Mattar, and R. Aguilera. A novel method for performance analysis of compartmentalized reservoirs. Oil & Gas Science and Technology, 71(3):1–20, 2014.
- [33] S. A. A. Shukairi. Evaluation of reservoir compartmentalization through organic geochemistry Jawdah field, south of Oman. SPE Kuwait Oil & Gas Show and Conference, Mishref, Kuwait, 2019.
- [34] P. C. Smalley and A. H. Muggeridge. Reservoir compartmentalization: get it before it gets you. Reservoir Compartmentalization. Geological Society of London, 2010.
- [35] H. Stehfest. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transform. Communication of the ACM, 1:47–49, 1970.
- [36] Z. Sun, X. Yang, Y. Jin, S. Shi, and M. Wu. Analysis of pressure and production transient characteristics of composite reservoir with moving boundary. Energies, 13(34):1–18, 2020.
- [37] E. F. Vogas. Utilização de solução analítica para a determinação da pressão em reservatório compartimentado de óleo. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2021.
- [38] C. Wang. Pressure transient analysis of fractured wells in shale reservoirs. Master’s thesis, Colorado School of Mines, 2013.
- [39] J. E. Warren and P. J. Root. The behavior of naturally fracture reservoirs. Society of Petroleum Engineers Journal, pages 245–255, 1963.
- [40] W. Wendong, M. Shahvali, and S. Yuliang. A semi-analytical fractal model for production from tight oil reservoirs with hydraulically fractured horizontal wells. Fuel, 158:613–618, 2015.

- [41] Irwin A. Wiehe. Process Chemistry of Petroleum Macromolecules. CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, USA, 2008.
- [42] S. Whitaker. The Method of Volume Average. Theory and Applications of Transport in Porous Media. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [43] Y. S. Wu, K. Pruess, and P. Persoff. Gas flow in porous media with Klinkenberg effects. Transport in Porous Media, 32:117–137, 1998.
- [44] F. Zeng and G. Zhao. Semianalytical model for reservoirs with Forchheimer’s non-Darcy flow. Society of Petroleum Engineers Reservoir Evaluation & Engineering, 11(2):280–291, 2008.
- [45] Q. Zhanga, X. Wang, D. Wang, J. Zeng, F. Zeng, and L. Zhang. Pressure transient analysis for vertical fractured wells with fishbone fracture patterns. Journal of Natural Gas Science and Engineering, 52:187–201, 2018.