

Lenteamento Gravitacional, Grupo Local e Estrutura da Galáxia: Uma Revisão

Nilo Silvio Costa Serpa

GAUGE-F Scientific Researches, Brazil; Centro Universitário ICESP.

Received: _02/25/19_ / Accepted: _04/11/19_ / Published: _04/30/19_.

Abstract: The subject of "gravitational lensing" has gained expression since the 1960s. Over the last twenty years, with the dizzying advances in information technology and space remote exploration technology, numerous simulations and observational results in this field have produced significant changes in our way of seeing the universe both on a large scale and within the limits of the most accessible galactic neighborhood. In the present study, while focusing on the effects of weak gravitational lenses and microlensing in the Local Group, I will take a brief but solid approach to the basic theory of gravitational lenses, referring the reader, whenever necessary, to the world scientific literature.

Key words: Gravitational lenses, Local Group, weak lensing.

Resumo: O assunto das "lentes gravitacionais" ganhou expressão desde a década de 1960. Nos últimos vinte anos, com os avanços vertiginosos da tecnologia da informação e da tecnologia de exploração espacial remota, numerosas simulações e resultados observacionais neste campo produziram mudanças significativas em nossa maneira de ver o universo, tanto em grande escala quanto dentro dos limites da vizinhança galáctica acessível. No presente estudo, embora me concentre nos efeitos das lentes gravitacionais fracas e do microlenteamento no Grupo Local, farei uma breve, porém sólida, abordagem à teoria básica das lentes gravitacionais, remetendo o leitor, sempre que necessário, à literatura científica mundial.

Palavras-chave: Lentes gravitacionais, Grupo Local, lenteamento fraco.

Letras romanas

J : jacobiano

G : constante gravitacional

Letras gregas

ξ : parâmetro de impacto

α : ângulo de deflexão

μ : magnificação

θ_E : raio de Einstein

1. Introdução

O assunto "lentes gravitacionais" ganhou força a partir dos anos 60. Nos últimos trinta anos, com os avanços da informática e da tecnologia de prospecção espacial, numerosos trabalhos com simulações e resultados observacionais nesse campo têm produzido mudanças expressivas em nossa maneira de ver o universo, tanto em larga escala quanto nos limites da vizinhança galáctica mais acessível.

A busca por efeitos de lenteamento na vizinhança da Via-Láctea compreende um considerável capítulo do estudo geral sobre lenteamento gravitacional,

Corresponding author: Nilo Sylvio Costa Serpa, Ph.D., professor, research fields: quantum gravity, quantum computing, cosmology and thermal systems engineering. E-mail: niloserpa@gmail.com.



provavelmente capaz de ocupar uma vida de pesquisa sem que seja completamente esgotado. Isso se deve em parte a que muito tempo de exposição é necessário para computar as possibilidades de lenteamento entre um observador na Terra e as estrelas mais importantes, por exemplo, da Grande Nuvem de Magalhães. Além disso, a composição do halo por si só já constitui um tema com nuances próprias de grande incerteza, sobretudo no tocante à composição da matéria escura. Finalmente, as dificuldades inerentes à tarefa de observar impõem as costumeiras restringências de precisão, algo com que sempre teremos de nos preocupar em qualquer modelagem, e que nos faz repensar com frequência nossos métodos e objetivos.

A potencialidade para o esclarecimento detida pela teoria do lenteamento gravitacional compreende desde a descoberta de planetas até as possíveis implicações sobre a radiação cósmica de fundo. No presente estudo, embora me concentre nos efeitos de lenteamento gravitacional restritos ao grupo local, farei uma abordagem resumida, porém sólida, da teoria básica das lentes gravitacionais, remetendo o leitor, sempre que necessário, às referências consagradas na literatura científica mundial.

1.1 O estado da arte

De acordo com a teoria geral da relatividade, a gravidade nada mais é do que a realização da curvatura do espaço-tempo [4]. Consequentemente, os raios de luz podem ser curvados na vizinhança de um objeto massivo. Ainda que o primeiro cálculo conhecido acerca da deflexão de um raio de luz por um objeto massivo tenha sido realizado por Soldner em 1801 [17] com base na mecânica Newtoniana¹, a busca efetiva por lentes gravitacionais remonta a princípios do século XX (Eddington 1919, primeiro a testar as

previsões de Einstein, e Lodge 1919), sendo Zwicky (1937) quem se antecipou na compreensão do efeito de lenteamento em sua dimensão cosmológica [17]. Em 1964, Sjur Refsdal apresenta pela primeira vez um método para determinação da massa de uma estrela atuando como lente [17].

Apesar dos diversos artigos publicados durante os anos 80, somente em Blandford & Narayan (1992) encontramos uma abordagem mais concisa e sistemática do assunto, resumindo quase vinte anos de estudos (Dyer & Roeder 1973, Mitrofanov 1981, Narayan *et al* 1984, Crawford *et al* 1986, Blanchard & Schneider 1987, Sasaki 1989, Watanabe & Tomita 1991, Bartelmann & Schneider 1991) [16]. No mesmo ano aparece o primeiro livro dedicado exclusivamente ao tema (Schneider *et al* 1992) [17]. Em particular, Chang & Refsdal (1979) e Gott (1981) já haviam observado que mesmo uma imagem dupla não resolvida de um quasar, criada por uma massa pontual no halo de uma galáxia distante, pode ser analisada em termos do tempo de variação do brilho combinado das duas imagens [16]. Dessa maneira, é possível detectar os efeitos da matéria escura bariônica na forma de anãs marrons e objetos jovianos.

A partir de 1992 sucederam-se numerosas contribuições ao estudo das lentes gravitacionais [2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. Dos trabalhos mais recentes restringir-me-ei a mencionar a importante compilação de Merten (2010) [8].

1.2 Dos objetivos do artigo

O conceito de lente gravitacional, em sua acepção mais ampla, resume um coletivo de efeitos do campo gravitacional sobre a radiação eletromagnética, assumindo-a geometricamente representada por raios. Minha pesquisa é baseada sobretudo no lenteamento gravitacional fraco, acerca do qual apresentarei os aspectos teóricos mais relevantes com o auxílio de algumas simulações computacionais. Em seguida, farei

¹ Soldner determinou que o ângulo de deflexão no limbo solar seria de $0.84''$, metade do valor calculado pela teoria geral da relatividade.

uma revisão sucinta sobre o Grupo Local, sua estrutura e sua composição. Por último, discutirei o que de melhor se tem produzido no sentido da aplicação do conhecimento acumulado sobre lentes gravitacionais ao estudo da estrutura da galáxia, partindo da ocorrência de lenteamento no Grupo Local.

2. Teoria básica das lentes gravitacionais

Admitamos que o halo da nossa galáxia seja composto, dentre outros objetos, por uma quantidade não negligenciável de astros escuros massivos. Se algum desses objetos do halo estiver próximo o bastante da linha de visada de um observador focado numa estrela distante ocorrerá um efeito caracterizado pelo abrilhantamento temporário da luz proveniente da estrela em foco. Tal efeito, descrito com mais detalhes adiante, é denominado microlenteamento (*microlensing*).

Na maioria dos casos de interesse em astrofísica é suficiente usar o campo gravitacional no limite fraco para a descrição do efeito de lenteamento próximo a massas pontuais. Consideremos o cenário descrito na Figura 1. Assumindo simetria esférica, com a massa pontual no centro das coordenadas, qualquer trajetória através do plano da lente desde a fonte até o observador O será defletida (veja detalhe na Figura 1.a). Uma vez que o sistema de coordenadas é arbitrário, podemos adotar o plano $\theta = \pi/2$ para o caminho da luz.

Tendo em mente o esquema da Figura 1, podemos escrever a equação da lente,

$$\beta = \theta - \alpha, \tag{1}$$

onde

$$\alpha = \left(\frac{D_{ls}}{D_{os}} \right) \hat{\alpha}$$

é o ângulo de deflexão.

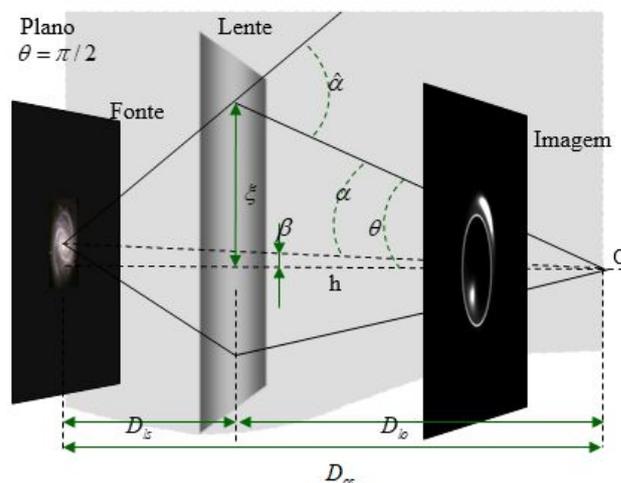


Figura 1 - Esquema típico de uma lente gravitacional simples.

Dado que

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 \xi}$$

e

$$\xi = D_{lo} \theta \text{ (para ângulos pequenos),}$$

sendo ξ o “parâmetro de impacto”, é lícito reescrever a equação (1) como

$$\beta = \theta - \left(\frac{D_{ls}}{D_{os} D_{lo}} \right) \frac{4GM}{c^2 \theta}.$$

Definimos o chamado raio de Einstein pela igualdade

$$\theta_E = \sqrt{\frac{D_{ls}}{D_{os} D_{lo}} \frac{4GM}{c^2}} \therefore$$

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta} \therefore \tag{1.a}$$

$$\beta = \frac{\theta^2 - \theta_E^2}{\theta}.$$

Finalmente,

$$\frac{\theta}{\beta} = \frac{\theta^2}{\theta^2 - \theta_E^2}.$$

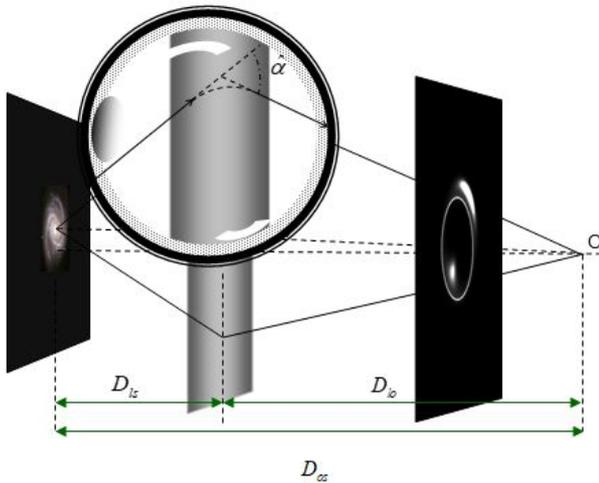


Figura 1.a- Detalhe do caminho real percorrido por um fóton cuja trajetória sofre deflexão por lenteamento gravitacional.

A expressão (1.a) é uma simples equação de segundo grau com soluções

$$\theta_{1,2} = 1/2 \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right),$$

as quais fornecem as posições das duas imagens geradas por uma fonte pontual.

Chegamos assim à magnificação $\mu_{1,2}$, a soma das magnificações das imagens individuais dada em função do raio de Einstein θ_E ,

$$\mu_{1,2} = \left(1 - \left[\frac{\theta_E}{\theta_{1,2}} \right]^4 \right)^{-1} = \frac{u^2 + 2}{2u\sqrt{u^2 + 4}} \pm \frac{1}{2}, \quad (2)$$

em que u é outro parâmetro de impacto definido como a separação angular entre fonte e lente medida em unidades de θ_E segundo

$$u = \beta / \theta_E.$$

Podemos chegar à expressão da magnificação fazendo $y = \beta / \theta_E$ e $x = \theta / \theta_E$, donde

$$y = x - \frac{1}{x}.$$

A magnificação produzida por qualquer lente axialmente simétrica é dada pela Jacobiana

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{y}{x} \frac{\partial y}{\partial x} = \left(1 - \frac{\alpha}{x} \right) \left(1 - \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{x} \right)^4 \therefore \end{aligned}$$

$$\mu = \left[1 - \left(\frac{1}{x} \right)^4 \right]^{-1}.$$

Compreendendo melhor o conceito de magnificação, lembremos que a quantidade de luz recebida de uma estrela é determinada pelo ângulo sólido subtendido pela estrela. O ângulo sólido por sua vez é compreendido pela área angular aparente da estrela no céu. O efeito de lenteamento aumenta o ângulo sólido sob o qual nós recebemos a luz, aumentando assim a quantidade dessa luz recebida.

Dessa forma, se nós pudermos calcular o ângulo sólido da estrela na ausência da lente e em seguida com a lente, a magnificação seria, em última análise,

magnificação = ângulo sólido com lenteamento/ângulo sólido sem lenteamento.

Um dos mais interessantes fatos relacionados ao efeito de lenteamento é que um dos autovalores da matriz Jacobiana da equação da lente desaparece na curva crítica, isto é, sobre a curva para a qual a equação da lente é estacionária. Formalmente, a equação da lente é quadrática na direção do autovalor esvanecente (“direção crítica”).

Tomemos a equação da lente na forma complexa,

$$\omega(x, y) = (x + iy) + \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi(x, y),$$

onde o potencial gravitacional bidimensional é relacionado com a densidade superficial κ (em unidades de densidade crítica) por

$$-\Delta\Phi = 2 \frac{\Sigma}{\Sigma_{crit}} = 2\kappa.$$

Agora, introduzimos $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$ de tal modo que

$$\begin{cases} x = z - iy \\ x = \bar{z} + iy \end{cases} (+) \\ \hline 2x = \bar{z} + z \quad \therefore$$

$$x = \frac{1}{2}(\bar{z} + z), \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \quad (4)$$

A diferencial total de uma função complexa $\omega(z)$ é

$$d\omega(z) = \frac{\partial\omega(z)}{\partial x} dx + \frac{\partial\omega(z)}{\partial y} dy.$$

Inserindo as imposições definidas em (29) e (30),

$$d\omega(z) = \frac{\partial\omega(z)}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial z} dz + \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) + \frac{\partial\omega(z)}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial z} dz + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right);$$

$$d\omega(z) = \frac{1}{2} \frac{\partial\omega(z)}{\partial x} (dz + d\bar{z}) + \frac{1}{2i} \frac{\partial\omega(z)}{\partial y} (dz - d\bar{z}).$$

Consideremos as derivadas de Wirtinger de uma função $\omega(z)$,

$$\frac{\partial\omega}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\omega}{\partial x} - i \frac{\partial\omega}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial\omega}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\omega}{\partial x} + i \frac{\partial\omega}{\partial y} \right).$$

Elas são invocadas sempre que se deseja descrever localmente a estrutura de expressões complexas. Seja a Jacobiana

$$J = \left| \frac{\partial\omega(z)}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial\omega(z)}{\partial \bar{z}} \right|^2.$$

O comportamento local da função $\omega(z)$ é estabelecido pela equação de Beltrami,

$$\frac{\partial\omega(z)}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \frac{\partial\omega(z)}{\partial z}, \quad (5)$$

onde $\mu(z)$ é uma função complexa não-analítica sobre o plano complexo (não confundir com a magnificação μ), de maneira que para

$$J = \left| \frac{\partial\omega(z)}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial\omega(z)}{\partial \bar{z}} \right|^2 = 0, \quad |\mu(z)| = 1.$$

Uma forma de visualizar aquele comportamento local de $\omega(z)$ é, de acordo com Schramm, por via do chamado “campo de elipses” do mapeamento extraído da equação de Beltrami. A Figura 2 mostra como um campo de elipses teórico e idealmente alinhado é distorcido por uma lente pontual (supondo simetria radial). Discuti com Schramm acerca de alguns aspectos do efeito de lenteamento e adicionei comandos ao código original por ele desenvolvido para exibição da curva crítica e construção da cáustica correspondente (Figura 3, $J = 0$) [14]. Para as galáxias elípticas (elipses vermelhas na figura), hipoteticamente dispostas em configuração horizontal, a lente causaria uma deformação como a que aparece na vizinhança da curva crítica (círculo vermelho). Nesse caso, a equação da lente no plano complexo é definida em código Maple pela função $\omega := z \rightarrow 0.5 * z - k / \text{conjugate}(z)$, onde k fixa a extensão da lente.

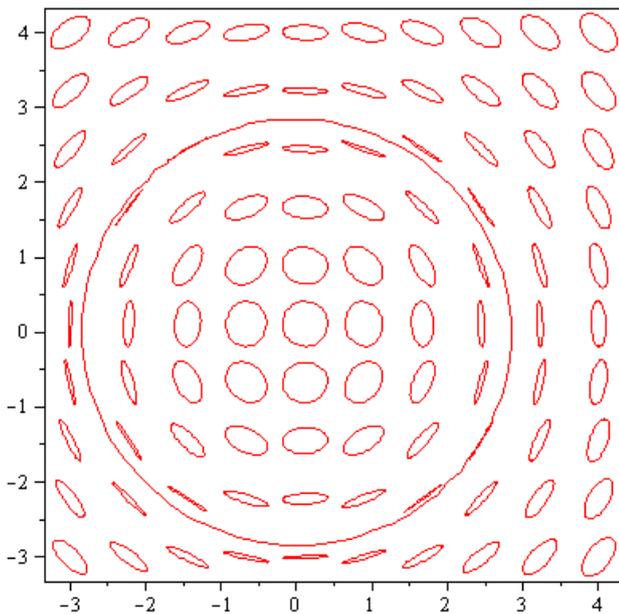


Figura 2 – Campo de elipses deformado pelo efeito de lenteamento para $k = 4$ (simetria radial perdida pela introdução do *shear*).

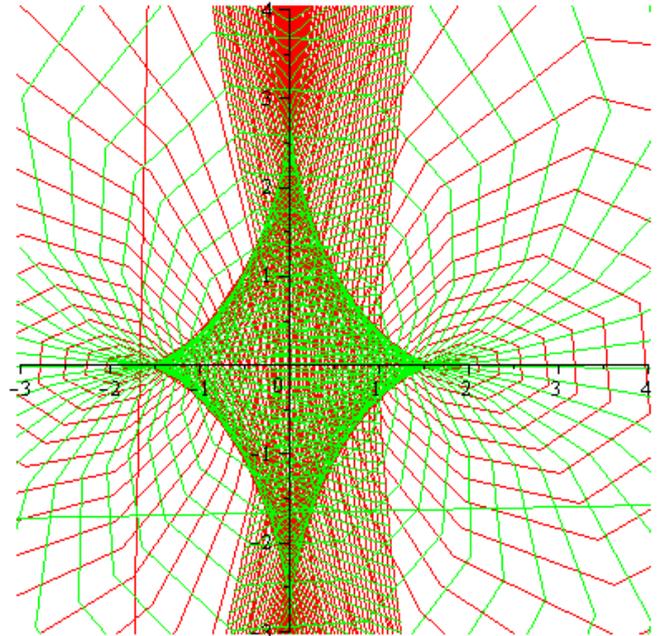
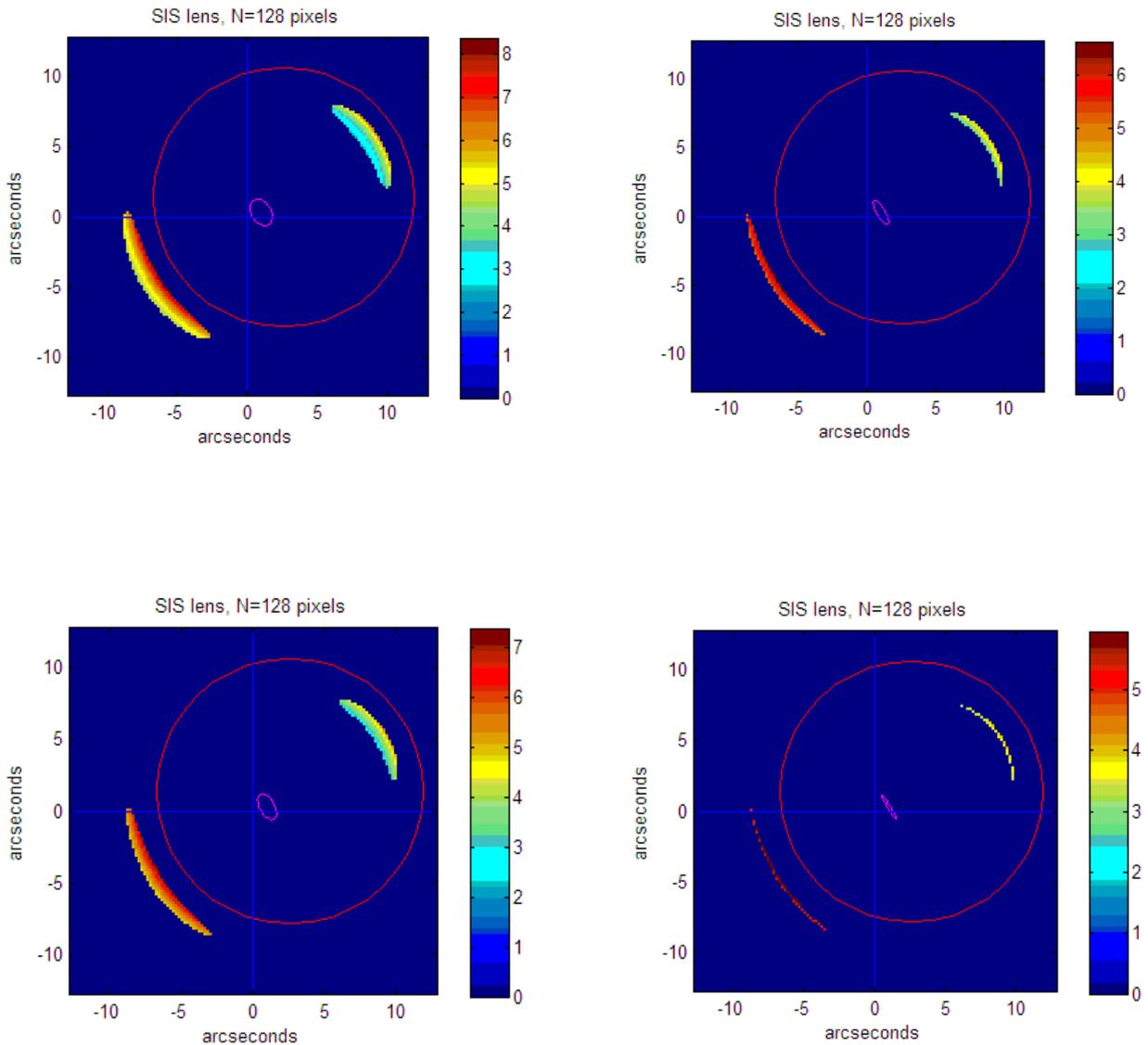


Figura 3 – Cáustica referente à curva crítica da Figura 3. A densidade de linhas é relacionada com a densidade de luz.

A Figura 4 ilustra o efeito de lenteamento, porém, considerando como fonte não um ponto massivo, mas uma galáxia elíptica. Nela o leitor poderá perceber com mais clareza o fenômeno da magnificação. Utilizei um código em MATLAB, criado por Newbury e Spiteri [9], e adaptado por mim para a geração de imagens segundo o modelo da esfera isotérmica singular (EIS), manipulando o parâmetro de massa e os *redshifts* da lente e da fonte. Cabe lembrar que nesse modelo o conteúdo massivo da lente é assumido ser um gás ideal constringido por um potencial gravitacional de simetria esférica. Tal gás é suposto em equilíbrio térmico e hidrostático. A fonte é representada pela pequena elipse magenta e o anel de Einstein pelo grande círculo vermelho. A magnificação diverge ao longo desse último de acordo com uma escala de cor; quanto maior a magnificação, mais nos dirigimos para o extremo vermelho do espectro.



Os parâmetros da lente são as coordenadas do centro de distribuição de massa da EIS, o parâmetro de massa σ ($= 750$) e o redshift da lente ($= 0.3$). Os parâmetros da fonte são o redshift ($= 0.7$), as coordenadas do centro da fonte, a elipticidade e o fator de magnificação ($= 1.0$).

Na discussão acima eu considerei uma lente gravitacional a uma distância angular fixa de uma estrela. De fato, a separação angular está

Figura 4 - De cima para baixo, da esquerda para direita: sequência de simulações para quatro elipticidades da galáxia fonte (0.3, 0.5, 0.7 e 0.9).

sempre mudando em função do movimento relativo da lente e da estrela. Tal fato implica em que o brilho total das duas imagens se altera de modo peculiar.



3. O Grupo Local

O Grupo Local é um pequeno grupo de cerca de 50 galáxias, a maioria delas anãs distribuídas ao redor da Via-Láctea e da M31 em amplitude radial máxima de aproximadamente 1.2 Mpc, supondo um potencial de simetria esférica. Em geral não se comenta o porquê da simetria esférica, mas podemos dizer que 1) ela serve para tornar a teoria e os cálculos mais simples, além de que 2) tudo que observamos está no passado, ao longo de uma linha radial que se aprofunda em qualquer direção desde um observador convenientemente posicionado no “centro”.

A busca de novos integrantes do Grupo Local parece uma tarefa contínua. Muitos objetos foram descobertos em anos recentes. A dinâmica observada das galáxias ditas “satélites” do Grupo Local sugere a existência de regiões dominadas por halos escuros contendo 10 vezes mais matéria escura do que as satélites conhecidas. Do ponto de vista dinâmico, por menos que se admita, modelos de MOND (Modified Newtonian Dynamics, Milgrom 1983) podem dar conta do cenário sem lançar mão de matéria escura, apenas alterando a segunda lei de Newton em baixas acelerações. Dessa forma, as objeções feitas às teorias de MOND deveriam discutir tão somente os limites de sua generalização a outros fenômenos. O fato é que MOND se torna mais complexa quanto mais complexo for o contexto estudado (por exemplo, é preciso introduzir o formalismo vetorial/tensorial para fazer cosmologia com MOND). Entretanto, até o presente momento, MOND não pode ser refutada como recurso de modelagem galáctica.

O grupo local é bastante heterogêneo em morfologia, idade, metalicidade e grau de isolamento. Galáxias anãs elípticas (dEs) e esféricas (dSphs) concentram-se em torno das grandes espirais; galáxias anãs irregulares (dIrrs) tendem a permanecer mais afastadas, muito embora as duas mais massivas (Grande Nuvem de Magalhães e Pequena Nuvem de

Magalhães) estejam bem próximas à Via-Láctea e interajam com ela e entre si. Tal distribuição está longe de ser completamente entendida. Por suas características de baixa metalicidade e níveis relativamente altos de gás, as dIrrs têm sido consideradas similares às primeiras galáxias do universo.

As galáxias dIrrs apresentam traços de formação recente de estrelas. Várias delas possuem aglomerados globulares e abertos. Já as dSphs são dominadas por estrelas velhas ou de idade intermediária, sendo sistemas muito pobres em gás. A ausência de gás nesses objetos tem sido difícil de explicar, sobretudo porque há evidências de episódios recentes de formação estelar em algumas dSphs. As galáxias dEs têm concentração central bem pronunciada, ao contrário de suas vizinhas esferoidais com pequenos adensamentos em seus centros. Tanto galáxias dIrrs de baixa massa como várias galáxias dSphs exibem vestígios centrais de suas últimas criações estelares, fato que permite estabelecer um gradiente radial de idade associado a outro de metalicidade.

As galáxias espirais são sem dúvida os indivíduos mais complexos. Dotadas de estrelas de todos os tipos, idades, metalicidades e comportamentos cinemáticos, elas dominam gravitacionalmente o Grupo Local. Seus discos finos, berçários de novas estrelas, são preenchidos por nuvens moleculares e dominados por estrelas de população I. Nos discos espessos e nos halos predominam estrelas de população II, sendo que as estrelas extremamente pobres em metais dos halos são bem mais difíceis de datar.

Grosso modo, as estrelas são agrupadas em duas classes gerais ditas “População I” e “População II”. A classificação depende de fatores como composição química, presença de gás nas redondezas, localização na galáxia, cor integrada e outros aspectos, mas, fundamentalmente, podemos afirmar que as

estrelas da população I têm elevada metalicidade enquanto que as da população II apresentam baixa metalicidade. Tal diferença está diretamente relacionada com a idade das estrelas; as mais jovens, concentradas no disco fino, são ricas em metais, ao passo que as mais antigas, típicas das regiões externas e do halo, são pobres em metais. No cômputo geral, essa imagem atende à realidade observada, uma vez que a região do disco galáctico concentraria a matéria precipitada do halo durante o processo de formação da galáxia. A formação de nuvens moleculares no disco fino e o gradativo enriquecimento do meio interestelar pelos sucessivos ciclos de esvanecimento e geração de estrelas garantem a alta metalicidade do disco em detrimento das antigas e quase isoladas regiões do halo. Naturalmente, essa classificação é simplista e não resolve as subpopulações intermediárias, porém, serve para destacar a metalicidade como fator crucial no estudo da evolução estelar.

Como demos a entender acima, a heterogeneidade do Grupo Local nos leva a traçar histórias bem distintas para cada objeto. O entendimento da diversidade das galáxias anãs é algo que ainda nos escapa, apesar das modernas técnicas fotométricas empregadas na derivação das suas prováveis origens e da quantidade de dados acerca da cinemática relativa desses objetos e de suas dinâmicas internas. Contudo, elas compartilham padrões globais como metalicidade média, magnitude absoluta e brilho superficial central. Parece claro que suas massas e interações com o meio externo desempenham papel fundamental em cada estágio evolutivo. Por último, cabe lembrar que, apesar do Grupo Local ser relativamente pouco profundo e denso para produzir efeitos apreciáveis de lenteamento gravitacional, não se descarta a possibilidade de termos em futuro não muito distante alguns resultados de interesse, provenientes da varredura realizada por telescópios de grande resolução.

4. Lenteamento no Grupo Local

Como observou o astrofísico Bodan Paczynski em 1986, se o halo galáctico contém objetos escuros, chamados *Massive Compact Halo Objects* (MACHOS), com massas que variam desde a de Júpiter ($\sim 1/1000$ da massa solar) até a das anãs marrons ($\sim 1/10$ da massa solar), então tais objetos ao cruzarem a linha de visada entre a Terra e as estrelas mais distantes poderiam provocar efeitos de microlenteamento.

Quatro equipes de colaboradores — EROS, MACHO, OGLE e DUO — se empenharam na busca por objetos do halo, usando estrelas da Grande Nuvem de Magalhães (GNM) como referencial de *background* contra o qual se investigam os movimentos daqueles objetos [1].

A Figura 5 mostra um esquema de como ocorre o lenteamento no domínio em questão. A luz proveniente de uma estrela na GNM é defletida por um objeto massivo do halo. Tal objeto atua assim como uma lente gravitacional. Em tese, por meio da medição da distribuição de eventos de lenteamento se poderia inferir alguma informação acerca da natureza e da distribuição dos objetos do halo.

Na prática, procurar essas lentes é uma tarefa bastante ingrata, pois o tipo de evento descrito acima ocorre muito raramente. A colaboração EROS, por exemplo, é capaz de monitorar cerca de 4 milhões de estrelas ao mesmo tempo [1]; em três anos de varredura foram encontrados apenas dois eventos classificáveis como resultantes de lenteamento. Por outro lado, a equipe MACHO registrou vários candidatos ao fenômeno.



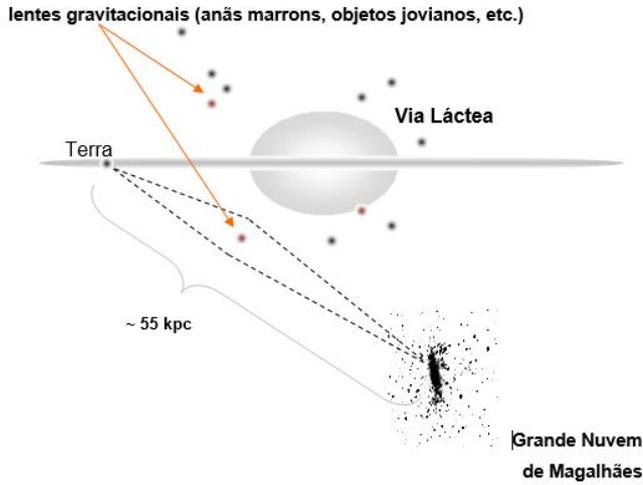


Figura 5 – Vista esquemática do sistema da Via-Láctea com ênfase na Grande Nuvem de Magalhães e em objetos massivos do halo capazes de produzir lenteamento.

Retomemos o sistema de lenteamento típico mostrado na Figura 1. Suponhamos que existam vários objetos lenteadores no campo de visão do observador. Definimos a profundidade óptica para o lenteamento gravitacional como o ângulo sólido que confina tais objetos e seus respectivos anéis de Einstein dentro do campo de visão.

Agora, suponhamos todos aqueles objetos com a mesma massa M . Assumindo a distância D_{lo} , sobre uma “lâmina” plana hipotética com espessura ΔD_{lo} podemos projetar em média uma lente por área superficial

$$\pi R_M^2 = \frac{M}{\rho \Delta D_{lo}}, \quad (6)$$

onde ρ é a densidade de massa média, considerando todas as lentes no volume $\pi R_M^2 \Delta D_{lo}$. A secção reta de

cada lente é dada por πR_E^2 (R_E é o raio do anel de Einstein). A contribuição da lâmina para a profundidade óptica é

$$\Delta \tau = \frac{\pi R_E^2}{\pi R_M^2} = \left[\frac{4\pi G \rho D_{lo} (D_{os} - D_{lo})}{c^2 D_{os}} \right] \Delta D_{lo}.$$

Logo, a profundidade óptica total dentro do campo de visão do observador, devida a todas as lentes entre a fonte e o observador, é a integral

$$\tau = \int_0^{D_{os}} \frac{4\pi G \rho D_{lo} (D_{os} - D_{lo})}{c^2 D_{os}} dD_{lo} \therefore$$

$$\tau = \frac{4\pi G}{c^2} \int_0^{D_{os}} \rho \frac{D_{lo} (D_{os} - D_{lo})}{D_{os}} dD_{lo} \therefore$$

$$\tau = \frac{4\pi G}{c^2} \int_0^{D_{os}} \rho \frac{D_{lo} D_{os} (1 - D_{lo} / D_{os})}{D_{os}} dD_{lo} \therefore$$

$$\tau = \frac{4\pi G}{c^2} \int_0^1 \rho D_{lo} D_{os} (1 - x) dx \ ;$$

$$(x = D_{lo} / D_{os} \therefore dx = \frac{1}{D_{os}} dD_{lo}) \therefore$$

$$\tau = \frac{4\pi G}{c^2} \int_0^1 \rho x D_{os} D_{os} (1 - x) dx \therefore$$

$$\tau = \frac{4\pi G}{c^2} D_{os}^2 \int_0^1 \rho x (1 - x) dx .$$

Dessa forma, a profundidade óptica total depende da massa total das lentes, não das massas individuais M . Para densidade constante, temos que

$$\tau = \frac{4\pi G}{6c^2} \rho D_{os}^2 = \frac{2\pi}{3} \frac{G\rho}{c^2} D_{os}^2.$$

Se o sistema de lentes é auto-gravitante, supondo a distância D_{os} igual ao tamanho do sistema inteiro, o teorema do virial garante que

$$\frac{GM_{tot}}{D_{os}} \approx \frac{G\rho D_{os}^3}{D_{os}} \approx V^2, \quad (7)$$

onde V^2 é a velocidade de dispersão e ρ a densidade dada por

$$\rho \approx \frac{3M_{tot}}{4\pi D_{os}^3} \approx \frac{3}{4\pi G} \left(\frac{V}{D_{os}} \right)^3.$$

Combinando os resultados acima, deduzimos que

$$\tau \approx \frac{V^2}{c^2}.$$

Para a GNM, $\tau \approx \frac{V^2}{c^2} = \frac{10^4}{9 \times 10^{10}} = 0.11 \times 10^{-6}$.

O monitoramento do espaço na direção da GNM analisou dados de milhões de estrelas ao longo de vários anos. De acordo com a colaboração MACHO (USA/Austrália), a profundidade óptica deduzida dos possíveis eventos de microlenteamento (*lasting* entre 2 e 400 dias) é

$$\tau_{LMC(MACHO)} = 1.2_{-0.3}^{+0.4} \times 10^{-7}.$$

resultado totalmente compatível com o nosso cálculo anterior aproximado e que implica no fato de que o halo da Via-Láctea pode ser formado por MACHOs numa taxa entre 8% e 50%, e numa faixa de massas entre $0.15 M_{\odot}$ e $0.9 M_{\odot}$.

5. Conclusão

O lenteamento gravitacional, sobretudo no regime fraco, é um instrumento útil para estabelecer parâmetros de modelagem do Universo e para compor a descrição da sua história de expansão e evolução. Permite efetuar cálculos acerca do modelo cosmológico atualmente mais aceito, tais como a densidade total da matéria. Também se mostra promissor para testar teorias ligadas ao modelo padrão, para restringir as leis da gravidade em escalas muito grandes ou para avaliar propriedades da energia escura e da matéria escura. Tenho expectativa de que essa revisão motive jovens estudantes para o aprofundamento do tema no Brasil.



Referências

- [1] Ansari, R.; Cavalier, F.; Moniez, M., et al 1995. "Experimental Limits on the Contribution of Sub-Stellar and Stellar Objects to the Galactic Halo." *arXiv: astro-ph/9511073*.
- [2] Bartelmann, M.; Schneider, P. 2000. "Weak Gravitational Lensing." Elsevier Preprint.
- [3] Bartelmann, M. 2004. "General Relativity," Lecture Notes, Universität Heidelberg.
- [4] Eddington, A. 1975. *Mathematical Theory of Relativity*. New York, Chelsea, 1975.
- [5] Ghassemi, S. 2009. "Lensing Effects in Inhomogeneous Cosmological Models." *arXiv: 0901.0340v1*.
- [6] Gil-Merino Rubio, R. 2003. "Cosmology Through Gravitational Lenses." Doctoral Thesis, University of Potsdam.
- [7] Meneghetti, M. 2006. "Introduction to Gravitational Lensing." Lecture Notes organized in a course on web,

<http://www.ita.uni-heidelberg.de/~massimo/sub/glensing.html>.

- [8] Merten, J. 2010. *Gravitational Lensing: An Advanced Method to Recover the Mass Distribution of Galaxy Clusters*. PhD Thesis, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Fakultät für Physik und Astronomie.
- [9] Narayan, R.; Bartelmann, M. 1995. "Lectures on Gravitational Lensing." *Proceedings of the Jerusalem Winter School*. Edited by A. Dekel and J. P. Ostriker; Cambridge University Press.
- [10] Newbury, P.; Spiteri, R. 2002. "Inverting Gravitational Lenses." *SIAM Review*, 44(1): 111-130.
- [11] Paczynski, B. 1996. "Gravitational Microlensing in the Local Group," *Annu. Rev. Astron. Astrophys* 34, 419-59.
- [12] Perlick, V. 2004. "Gravitational Lensing from a Spacetime Perspective." *Living Reviews in Relativity*, Berlin.
- [13] Refsdal, S.; Surdej, J. 1994. "Gravitational Lenses." *Rep. Prog. Phys.* 56, 117.
- [14] Schneider, P. 1997. "The Cosmological Lens Equation and the Equivalent Single-Plane Gravitational Lens." *arXiv: astro-ph/9706185v1*.
- [15] Schramm, T.; Kayser, R. 1995. "The Complex Theory of Gravitational Lensing," *Astron. Astrophys.* 299, 1-10.
- [16] Serpa, N. 2007. "Weak Gravitational Lens Embedded in Lemaître-Tolman Spacetime." Monografia final do curso "Lentes Gravitacionais" ministrado pelo Prof. Dr. Martin Makler, CBPF, Rio de Janeiro.
- [17] Wambsganss, J. "Gravitational Lensing in Astronomy," *arXiv: astro-ph/9812021*.

