# MODELAGEM DE DISSIPAÇÃO DE CALOR POR INTERAÇÃO ENTRE ALETAS E CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL

# *MODELING OF HEAT DISSIPATION BY INTERACTION BETWEEN FINES AND VARIABLE THERMAL CONDUCTIVITY*

QUIRINO, Jonatas Motta[1]
SOBRAL, Rodolfo do Lago[2]
CORREA, Eduardo Dias[3]

**Resumo:** O presente trabalho descreve o perfil térmico de uma superfície estendida retangular simples, perpendicular à sua superfície primária e em regime permanente, que dissipa calor considerando condução, convecção e radiação térmicas. São estabelecidas condições de contorno de Neumann e Dirichlet, caracterizando que a dissipação de calor se dê apenas pelas faces da aleta, além de prever que a temperatura do ambiente seja homogênea. Uma vez que há grande diferença de temperatura entre a superfície primária e o fluido do ambiente, é necessário considerar os efeitos de condução térmica. Para a aproximação de situação real, considera-se a condutividade térmica do material variável em função da temperatura em cada ponto, o que torna a equação que rege o problema não-linear. Considera-se a utilização de aletas duplas, onde suas superfícies interagem termicamente, gerando efeitos mútuos.

**Palavras-chave:** Simulação numérica; Método de diferenças finitas; Condutividade térmica; Dissipação de calor; Interação mútua.

**Abstract:** The present work describes the thermal profile of a simple rectangular extended surface, perpendicular to its primary surface and in a permanent regime, which dissipates heat considering thermal conduction, convection and radiation. Neumann and Dirichlet boundary conditions are established, characterizing that heat dissipation occurs only through the faces of the fin, in addition to predicting that the ambient temperature is homogeneous. Since there is a large temperature difference between the primary surface and the ambient fluid, it is necessary to consider the effects of thermal conduction. For the approximation of the real situation, the thermal conductivity of the material is considered as a function of the temperature at each point, which makes the equation that governs the non-linear problem. The use of double fins is considered, where their surfaces interact thermally, generating mutual effects.

**Keywords:** Numerical simulation; Finite difference method; Thermal conductivity; Heat dissipation; Mutual interaction.

[1] Doutorando Engenharia Mecânica – UERJ/USU – jonatas.quirino@usu.edu.br
[2] Doutor Engenharia Mecânica – CEFET/RJ - rodolfosobrall@gmail.com
[3] Doutor Engenharia Mecânica – UERJ - edudc2000@gmail.com

## 1 INTRODUÇÃO

O objetivo central desta analise gira em torno da observação do comportamento térmico de aletas que dissipam calor de uma dada superfície primaria através dos processos de transferência de calor de condução, convecção e radiação térmica.

A análise de tal perfil de temperaturas visa apresentar a importância da consideração dos efeitos da radiação térmica na dissipação do calor e da mutualidade dos efeitos entre duas aletas, de maneira que, se comparado ao comportamento térmico na ausência de tais efeitos, há uma considerável discrepância nos resultados.

Uma vez que a maioria dos trabalhos que envolve o tema abordado considera o parâmetro de condução térmica constante, este estudo propõe considerar a variação de tal parâmetro para que se traga ainda maior aplicabilidade e aproximação da realidade.

Dado o exposto, a intenção deste trabalho é realizar uma análise aprofundada do ponto de vista de Engenharia, no qual estuda-se um problema termofísico, envolvendo elementos de Transferência de Calor e Termodinâmica, do ponto de vista matemático, no qual há o desenvolvimento de problemas matemáticos que apresentam certo nível de complexidade, e do ponto de vista computacional, onde todos os dados serão tratados a partir do desenvolvimento de um algoritmo que auxilie na realização de todos os cálculos necessários e exposição gráfica e numérica das soluções.

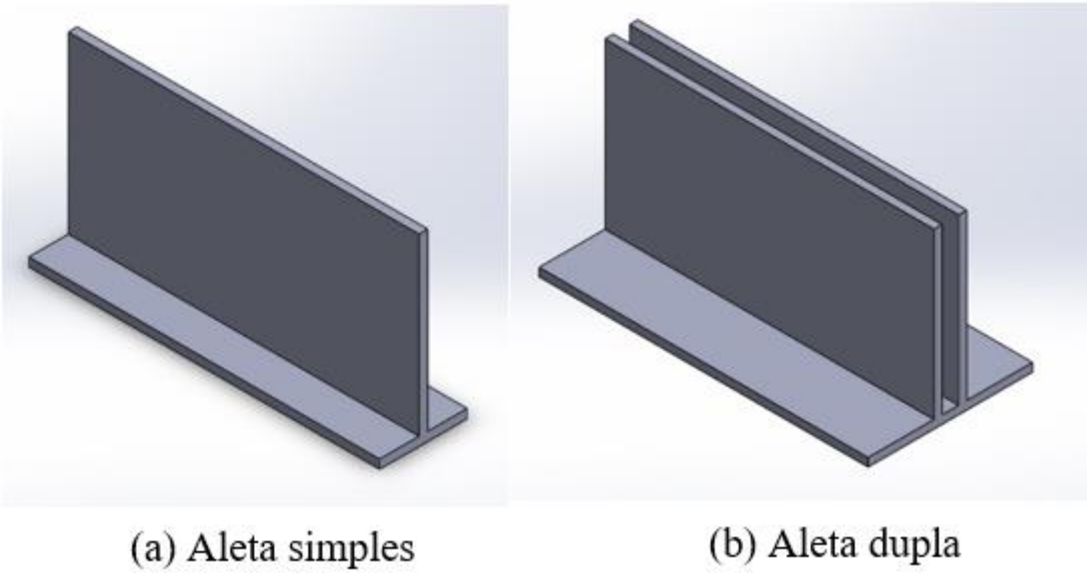
## 2 DEFINIÇÕES

Para analisar a dissipação térmica ao longo de uma superfície estendida partindo de uma determinada superfície primaria, deve-se considerar tal superfície estendida com geometria característica que a diferencie de sua superfície primaria.

É chamada superfície primaria aquela à qual a aleta está fixada com o propósito de remover calor dela e rejeitá-lo para o fluido no ambiente. Comumente é considerado para fins matemáticos que a superfície primaria seja de perfil infinito, visto que a análise se dá apenas no segmento específico em que a aleta se encontra.

Este trabalho apresentará diversas comparações pertinentes aos resultados esperados, dentre as quais nomeia-se "Aleta simples" ilustrada na Fig. 1a aquela que apresenta apenas uma superfície estendida ligada à superfície primaria e "Aleta dupla", que pode ser vista na Fig. 1b, aquela que possui duas superfícies estendidas ligadas à superfície primaria, onde a distância entre as mesmas seja muito pequena.

Figura 1 - Aletas




Fonte: Próprio autor

Considera-se que o corpo em questão e, consequentemente, as aletas analisadas estão em estado estacionário em relação a um referencial externo, ou seja, sua velocidade relativa a um ponto fora do corpo e nula. (SOBRAL, 2017)

Atribui-se ao sistema a característica de regime térmico permanente, no qual a aleta não é considerada uma fonte própria de calor, sendo a mesma portanto observada exclusivamente como dissipador do calor gerado pela superfície primaria, embora no caso de aletas duplas, uma aleta seja considerada fonte de calor da sua vizinha em efeito mútuo.

A caracterização da superfície estendida se dá principalmente por considerar-se em sua geometria, as dimensões de profundidade $(x)$ e altura $(y)$ muito maiores que a espessura $(z)$ da aleta. Tal premissa é fundamental para a considerar a superfície uma aleta.

No problema proposto considera-se também o material tanto da superfície primaria, quanto da aleta, do mesmo material, homogêneo e de condutividade térmica $(k)$ variavel, sendo esta uma função da temperatura em cada ponto.

Nesta análise de duas aletas que interagem termicamente, considera-se que as aletas possuem exatamente as mesmas dimensões geométricas e se encontram posicionadas simetricamente.

## 2.1 Descrição física

Uma vez que este trabalho estuda os efeitos de transferência de calor por condução, convecção e radiação térmica, deve-se observar as leis físicas que regem tais efeitos. Para cada um dos fenômenos térmicos associados a transferência de calor, existe uma lei correspondente que trata matematicamente cada efeito.

### 2.1.1 Condução térmica.

E o fenômeno de transferência de calor no interior de um corpo, no qual a energia térmica e transmitida entre as partículas do meio material através da agitação das moléculas presentes no corpo. Tal efeito se dá quando ao longo desse meio material há uma diferença de temperaturas e as moléculas que estão em maior temperatura transferem parte da energia para moléculas de menor temperatura, buscando assim o equilíbrio térmico.

***Lei de Fourier.*** A condução térmica foi modelada experimentalmente pelo matemático francês Jean-Baptiste Fourier (1768-1830), criando-se assim a Lei de Fourier, a qual diz que o fluxo de calor através de um material é proporcional ao gradiente negativo de temperatura, ou seja:

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{1}$$

Onde:
$Q$ → Energia térmica
$t$ → Tempo
$k$ → Condutividade térmica do material
$A$ → Superfície de transferência de calor
$T$ → Termperatura
$x_i$ → Posição em uma das dimensões do corpo

### 2.1.2 Convecção térmica.

Trata da dissipação de calor de um corpo com o ambiente que o envolve, desde que o ambiente tenha algum fluido em movimento e haja diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente. Essa situação leva à dependência das propriedades do fluido do ambiente e não do corpo em questão, onde a energia térmica interage entre o corpo e o ambiente, portanto em se tratando de dissipação de calor, o ambiente remove calor do corpo.

***Lei do resfriamento de Newton***. A transferência de calor por convecção térmica e descrita pela Lei que Isaac Newton formulou em 1701, sendo posteriormente aperfeiçoada até a forma atualmente conhecida. Tal lei determina que a taxa de perda de calor de um corpo para o meio material que o envolve e regida pela equação:

$$\frac{dQ}{dt} = hA[T(t) - T_\infty] \tag{2}$$

Onde:
$Q$ → Quantidade de calor
$t$ → Tempo
$k$ → Coe ciente de transferência de calor
$A$ → Superfície de transferência de calor
$T$ → Termperatura

$T_\infty$ → Temperatura do ambiente

### 2.1.3 Radiação térmica.

Descreve o fenômeno existente em qualquer corpo em que suas moléculas apresentem qualquer nível de vibração, ou seja, estando acima do zero absoluto. Partículas que estejam carregadas na matéria produzem ondas eletromagnéticas que transportam energia térmica oriunda de qualquer meio. Diferentemente dos fenômenos de condução e convecção térmica, a radiação não depende de haver um meio material para a propagação da energia térmica, uma vez que o fluxo eletromagnético pode se dar inclusive no vácuo.

***Lei de Stefan-Boltzmann***. Descoberta pelo físico austríaco Joseph Stefan (1835-1893) e posteriormente formulada pelo também físico austríaco Ludwig Boltzmann (1844-1906), a lei diz que a energia térmica emanada de um corpo por unidade de área é diretamente proporcional à quarta potência de sua temperatura absoluta, ou seja:

$$\frac{dQ}{dt} = \varepsilon A \sigma T^4 \tag{3}$$

Onde:
$Q$ → Quantidade de calor
$t$ → Tempo
$\varepsilon$ → Emissividade (em corpo negro, $\varepsilon = 1$)
$A$ → Superfície de transferência de calor
$\sigma$ → Constante de Stefan ($\sigma = 5{,}6697 \times 10^{-8} W/m^2K^4$)
$T$ → Termperatura

## 3 MODELAGEM MATEMÁTICA

A formulação matemática se dará de forma que todas as considerações citadas, tais como as leis físicas expostas sejam consideradas num ambiente de tratamento numérico do problema.

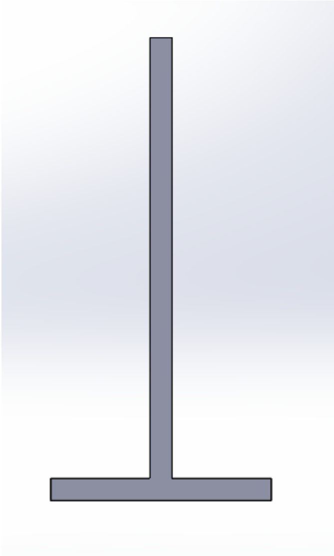
Por isso alguns métodos matemáticos foram adotados e aplicados com o auxílio computacional de plataformas adequadas.

Para analisar todo o processo de dissipação de calor em aletas, faz-se necessário entender fisicamente sobre o que trata o problema. Para melhor visualização, a Fig. 2 apresenta as definições básicas de uma aleta simples.

Sendo uma das definições do problema a condição de regime térmico permanente, a distribuição térmica nas direções de cada eixo cartesiano da aleta, tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0 \tag{3}$$

Figura 2 – Aleta simples



Fonte: Próprio autor

Utilizando a Lei de Leibniz, também conhecida como Regra do Produto, descrita por Apostol (1969), temos que

$$\left(\frac{\partial k}{\partial x}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\left(k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial k}{\partial y}\cdot\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\left(k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial k}{\partial z}\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\left(k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=0 \qquad (4)$$

Como, por definição exposta anteriormente, a condutividade térmica em questão (k) é considerada variável em função da temperatura, deve-se observar em quais direções vetoriais existe diferença de temperaturas.

Através das definições geométricas de aletas retangulares, pode-se supor que, se comparadas às demais direções no eixo cartesiano, apenas no eixo y as diferenças de temperatura entre seus pontos são consideráveis, portanto, as diferenças de temperatura nos demais eixos são desprezíveis, se avaliados pontos ao longo do eixo. (QUARTERONI, 2010)

Partindo dessa conclusão, tem-se que

$$\left(\frac{\partial k}{\partial x}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\left(k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial k}{\partial y}\cdot\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\left(k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial k}{\partial z}\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\left(k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=0 \qquad (6)$$

De acordo com Ruggiero e Lopes (1997), essa conclusão sugere que o problema seja analisado numa abordagem unidimensional, o que será discutido mais à frente. Portanto a equação do Perfil de temperaturas fica como

$$\left(k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial k}{\partial y}\cdot\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\left(k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\left(k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=0 \qquad (7)$$

### 3.1 Interação térmica entre aletas

Uma vez que um dos principais objetivos deste estudo e apontar a importância em se considerar efeitos térmicos combinados, é fundamental analisar o comportamento de uma superfície estendida quando exposta a outra superfície estendida, assumindo que haja troca de calor entre elas. Embora, como já foi dito, a aleta não seja considerada uma fonte de calor, tal premissa se refere a fontes de calor a própria aleta, contudo admite-se que uma aleta seja considerada uma fonte de calor para a aleta vizinha, gerando assim um efeito mútuo.

### 3.2 Condições de contorno

Uma vez exposta a equação derivadas parciais de segunda ordem, deduz-se a necessidade de duas condições de contorno aplicáveis em cada uma das direções. (DE OLIVEIRA FORTUNA, 2000)

Utilizou-se, portanto, duas condições de contorno matemáticas para viabilizar e facilitar até certo ponto a análise. Essas condições são muito comuns nos problemas matemáticos que envolvam equações diferenciais.

***Condição de Dirichlet***. Também conhecida como Condição de Primeiro Tipo, esta premissa recebe o nome de Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). A condição uma vez aplicada em uma equação diferencial estabelece os valores necessários a uma função no contorno do domínio. (CHENG & CHENG, 2005)

Ou seja, em

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), x \in \partial\Omega \tag{8}$$

Onde α e β são constantes, f é uma função conhecida no domínio $\partial\Omega$ e ∂u/∂n é a primeira derivada de u orientada na direção normal a $\partial\Omega$. (BOYCE *et. al.*, 1969)

Para satisfazer a condição de Dirichlet, tem-se que β=0, ou seja, num intervalo [0,1]:

$$u(0) = \alpha_1 u(1) = \alpha_2 \tag{9}$$

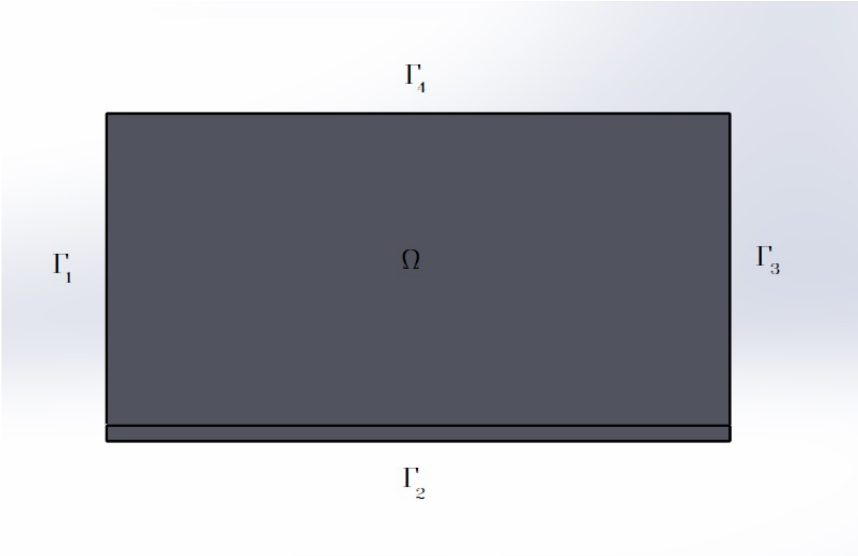
Condição de Neumann. Semelhante a condição de Dirichlet, esta é conhecida como Condição de Segundo Tipo, e leva o nome do matemático alemão Carl Neumann (1832-1925). Sendo esta aplicada em uma equação diferencial, estabelece os valores necessários à derivada de função no domínio, sendo, portanto, a descrição de um fluxo. (VAN HU & VANDEWALLE, 1991)

Ou seja, para a Eq. (8), a condição de Neumann descreve que

$$u(0) = \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial n}(1) = \alpha_2 \tag{10}$$

Considerando o eixo x, analisa-se o segmento compreendido entre a origem (x=0) e a extremidade da aleta (x=L). No eixo y, a representação da altura da aleta se dá entre y = 0 e y=H. Para o eixo z, a espessura da aleta é compreendida entre z=0 e z=δ, como é apresentado na Fig. 3.

Figura 3: Contorno e domínio




Fonte: Próprio autor

Admite-se determinadas hipóteses que viabilizem, ou mesmo facilitem a análise, tais como:

1. As faces $\Gamma_1$ $(x = 0)$, $\Gamma_3$ $(x = L)$ e $\Gamma_4$ $(y = H)$ estão termicamente isoladas, ou seja, não há interação térmica com o meio e o fluxo de calor é igual a zero. (Neumann).

2. A face $\Gamma_2$ $(y = 0)$ é condicionada com determinada temperatura imposta a ela, que seria igual ao valor da temperatura na superfície primaria. (Dirichlet)

3. Nas faces $\Omega_1$ $(z = 0)$ e $\Omega_2$ $(z = \delta)$, considera-se a dissipação de calor por convecção e radiação térmica.

### 3.4 Aplicação à modelagem

Partindo dos pressupostos expostos, tem-se que:

$$z = 0 \Longrightarrow k\frac{dT}{dz} = h(T - T_\infty) + \varepsilon\sigma T^4 \tag{11}$$

$$z = \delta \Longrightarrow -k\frac{dT}{dz} = h(T - T_\infty) + \varepsilon\sigma T^4 \tag{12}$$

Ao trabalhar com superfícies estendidas, deve-se considerar uma característica essencial de aletas, que e sua geometria como uma placa muito na. De tal forma, ao integrar as equações diferenciais acima, conclui-se através do Teorema do Valor Médio, apresentado por Apostol (1969) que

$$\bar{T} = \frac{1}{\delta}\int_0^{\delta} T dz \quad (13)$$

Portanto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(k\frac{d\bar{T}}{dz}\right) &= \frac{1}{\delta}[-h(\bar{T} - T_\infty) + \varepsilon\sigma T^4 - h(\bar{T} - T_\infty) + \varepsilon\sigma T^4] \\ &= -\frac{2}{\delta}h(\bar{T} - T_\infty) + \varepsilon\sigma T^4 = 0\end{aligned} \quad (14)$$

Substituindo os parâmetros pelos cálculos realizados, tem-se que

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial k}{\partial y}\cdot\frac{\partial T}{\partial y}\right) + k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{2}{\delta}h(\bar{T} - T_\infty) + \varepsilon\sigma T^4 = 0 \quad (15)$$

que é a equação que rege a distribuição térmica sem radiação na aleta, considerando já o problema como bidimensional, onde posteriormente será tratado como unidimensional. (HOLMAN, 2010)

A análise do efeito de radiação mutua entre duas aletas pode ser feita considerando que o calor oriundo de radiação emitido por uma aleta e exatamente o calor recebido pela outra aleta e os pressupostos de simetria garantem que os efeitos em ambas as aletas sejam os mesmos.

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As comparações entre as curvas geradas mostram que a discrepância entre os resultados considerando $k$ constante e variável. Quirino (2018) conclui que a admissão dos efeitos de condutividade térmica variável resulta em menores taxas de dissipação de calor, que temperaturas até 44,5% mais altas, por uma menor dispersão do calor.

Em projetos que envolvam aletas é comum haver um superdimensionamento, pois uma vez que a variação da condutividade térmica não é contemplada, os projetos apresentam margens de tolerância muito maiores do que se houvesse tal análise.

A inserção dos efeitos de radiação é fundamental para qualquer aplicação de aletas, pois esse é um efeito básico da dissipação de calor. A discrepância entre as curvas mostra que considerar a radiação térmica aumenta significativamente as taxas de dissipação de calor, pois a radiação é o acréscimo de um meio de dissipação de calor.

De acordo com Quirino (2018), a diferença da consideração de tais efeitos gera um perfil de temperaturas com valores até 57,2% mais baixos, por uma maior dispersão do calor.

As diferenças apresentadas por Quirino (2018) mostram esse resultado, que geram perfis com temperaturas até 21; 9% mais altos, por menor dispersão do calor. Importante observar que sem os feitos de radiação térmica, não haverá consideração de efeitos de mutualidade, uma vez que é a radiação que transfere calor mutuamente entre as aletas.

Pode-se concluir, portanto, que a análise de dissipação térmica, para se aproximar de um modelo real, nunca deve negligenciar a variação da condutividade térmica e os efeitos de radiação térmica.

## REFERÊNCIAS


Apostol, T. M. Calculus, vol. II Editora Revert SA, Barcelona, Buenos Aires, Caracas, Mexico, MCMLXXII, 1969

Boyce, W. E.; DiPrima, R. C. and Haines, C. W. Elementary di erential equations and boundary value problems Wiley New York, 1969

Cheng, A. H.-D. & Cheng, D. T. Heritage and early history of the boundary element method Engineering Analysis with Boundary Elements, 2005, 29, 268-302

de Oliveira Fortuna, A. Tecnicas computacionais para dinâminca dos  uidos:  conceitos basicos e aplicaçoes Edusp, 2000

Holman, J. P., Heat transfer McGraw-Hill, 2010

Quarteroni, A.; Sacco, R. & Saleri, F. Numerical mathematics Springer Science & Business Media, 2010, 37

Quirino, J. M.  Transferência de Calor com interação de aletas e condutividade térmica variável. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2018.

RUGGIERO, M. A. G. & LOPES, V. L. d. R. Calculo numerico: aspectos teoricos e com- putacionais Makron Books do Brasil, 1997

Sobral, R. d. l. Simulaçao numerica de aletas num contexto de altas temperaturas. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2017.

Van Hu el, S. & Vandewalle, J. The total least squares problem: computational aspects and analysis SIAM, 1991