# Uso de uma Inversão Numérica na Determinação da Pressão no Poço em Reservatórios de Gás Natural

# Ronnan Carlos Pinheiro Oliveira

Engenharia Mecânica, Instituto Politécnico, UERJ, Brasil.

# Gillyan Macário da Silva

Pós-graduação em Modelagem Computacional, Instituto Politécnico, UERJ, Brasil.

## Grazione de Souza

Departamento de Modelagem Computacional, Instituto Politécnico, UERJ, Brasil.

## Helio Pedro Amaral Souto

Departamento de Modelagem Computacional, Instituto Politécnico, UERJ, Brasil.

Resumo: Nas últimas décadas, o mercado de gás natural cresceu significativamente devido à produção a partir de novas reservas, à menor poluição gerada em comparação ao petróleo e à diversidade de aplicações. No que diz respeito às reservas petrolíferas, os avanços na recuperação do gás de xisto têm sido muito relevantes. Quando o gás flui nesses reservatórios, efeitos não descritos pela lei de Darcy podem ocorrer. Neste trabalho obtemos soluções analíticas para o escoamento de gás natural em reservatórios cilíndricos considerando o efeito de deslizamento. A metodologia emprega a pseudopressão, amplamente utilizada na indústria do petróleo, e uma inversão numérica de soluções no domínio de Laplace utilizando o algoritmo Stehfest. Desenvolvemos um código computacional em linguagem C para realizar as simulações. Os resultados mostraram a influência do escorregamento nos perfis de vazão de gás natural e na pressão de recuperação no poço produtor.

Palavras-chave: solução analítica, reservatório compartimentado, transformada de Laplace, algoritmo de Stehfest.

Abstract: In recent decades, the natural gas market has grown significantly due to production from new reserves, the lower pollution generated compared to oil, and the diversity of applications. Concerning petroleum reserves, the advances in recovering shale gas have been very relevant. When gas flows in these reservoirs, effects not described by Darcy's law may occur. In this work, we obtain analytical solutions for the flow of natural gas in cylindrical reservoirs considering the slippage effect. The methodology employs the pseudopressure, widely used in the oil industry, and a numerical inversion of solutions in the Laplace domain using the Stehfest algorithm. We developed a computational code in C language to carry out the simulations. The results showed the influence of slippage on the natural gas flow and recovery pressure profiles in the producing well.

Keywords: analytical solution, Laplace transform, natural gas reservoir, slippage, Stehfest's algorithm.

Corresponding author: Helio Pedro Amaral Souto, helio@iprj.uerj.br

Received: 10 May 2023 / Accepted: 04 July 2023 / Published: 27 Aug 2023.

# 1 Introdução

A indústria do petróleo tem como base a exploração, que é a busca por reservas, e a produção, que vem a ser a recuperação do óleo e do gás armazenados na formações rochosas subterrâneas portadoras de hidrocarbonetos, denominadas reservatórios. Trata-se de uma indústria caracterizada pelo forte investimento tecnológico em áreas muito diversificadas, tais como a perfuração e a completação de poços, o estudo das propriedades de fluido, a

CALIBRE - Revista Brasiliense de Engenharia e Física Aplicada – Copyright  $(\mathbf{\widehat{R}})$ 2023, Faculdades ICESP

análise das propriedades de rocha, a escolha das técnicas de injeção de fluidos, a elevação dos fluidos presentes no poço, a caracterização do sistema poço-reservatório e a modelagem físico-matemática do escoamento no reservatório, entre outras.

Dentro do contexto exposto, o objetivo central da pesquisa e do desenvolvimento na indústria de Óleo & Gás é maximizar o fator de recuperação de hidrocarbonetos, dentro de um cenário técnico e econômico viáveis, levando em consideração que nas últimas décadas aumentou o interesse pelos reservatórios de gás natural. Isso ocorreu em função dos avanços ocorridos na descoberta de reservas e no transporte e armazenamento deste insumo, além do crescimento dos mercados consumidores de gás. Tais fatos levaram a um aumento dos estudos voltados para o aproveitamento de gás natural em diversas áreas.

## 1.1 Produção e consumo de gás natural

Historicamente [33], o gás natural foi descoberto na Pérsia entre 6000 e 2000 a.C. Na China, um manuscrito indica o ano de 347 a.C. como o da sua primeira utilização. Na Europa, se deu, segundo registros, em meados do século XVII, mas ainda sem a sua produção comercial. De acordo com a mesma fonte, apenas em 1885, com os estudos realizados por Robert Bunsen, para a queima de misturas de ar e gás natural, é que foi possível utilizar as potencialidades desse combustível.

No Brasil, as primeiras descobertas de gás natural de origem fóssil ocorreram em 1940, em poços no estado da Bahia, com a sua expansão posterior para o eixo Rio-São Paulo, a partir do início da produção na Bacia de Campos [18]. Em agosto de 1996, o Brasil firmou um contrato de importação de gás natural da Bolívia por intermédio das Jazidas Petrolíferas Fiscais Bolivianas (YPFB). Assim, em 1997, iniciaram as obras de construção do gasoduto GASBOL, interligando Santa Cruz de La Sierra à Guararema, município de São Paulo [24]. Ao longo de 20 anos, tem sido garantido um fornecimento de 30 milhões de metros cúbicos por dia para o país.

Ademais, o gás natural vem ganhando importância como fonte de energia, devido ao seu menor impacto ambiental em relação às outras fontes fósseis (óleo e carvão) e à diversidade de utilizações. Principalmente, quando usado na área de transporte. No Brasil, ele tem sido uma alternativa à gasolina e ao óleo diesel. Por esse motivo, o consumo de gás natural veicular (GNV) subiu de 1,35 para 6,71 milhões de metros cúbicos por dia, no período de 2001 a 2006 [27].

Define-se o gás natural fóssil como sendo um combustível não renovável, encontrado em jazidas subterrâneas [17]. Um reservatório típico (Figura 1) é uma formação rochosa porosa, ou seja, composta por um arcabouço sólido que possui espaços, os poros, onde fluidos podem estar armazenados. O gás natural é uma mistura de hidrocarbonetos que, quando em condições de superfície se apresenta na forma gasosa, sendo preponderantes o metano (CH<sub>4</sub>), com cerca de mais de 80% da composição, e o etano (C<sub>2</sub>H<sub>6</sub>), alcançando mais de 10% da composição. Em menores quantidades aparecem o propano (C<sub>3</sub>H<sub>8</sub>) e o butano (C<sub>4</sub>H<sub>10</sub>), além de outros gases considerados como impurezas (por exemplo, N<sub>2</sub> e CO<sub>2</sub>). Do ponto de vista da sua explotação, ele pode ser obtido a partir de reservatórios de gás: seco (há exclusivamente gás do reservatório até a superfície), úmido (algum líquido surge no poço e/ou nas instalações de superfície) ou de condensação retrógrada (condensação ocorre ainda no reservatório).



Figura 1: Sistema de produção de hidrocarbonetos. Fonte: os autores.

Por outro lado, uma outra classificação leva em conta a sua origem: gás livre nos poros da rocha, gás dissolvido no óleo e/ou na água e gás adsorvido. Segundo a Agência Nacional de Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis [5], ele pode se encontrar associado ou não associado, sendo o primeiro aquele originado em um processo no qual o óleo é o objetivo principal, predominante na produção brasileira. O segundo, é aquele oriundo somente do conteúdo de gás natural presente no reservatório (Figura 2). Aqui, estuda-se somente a produção de gás que encontrase não associado, pois considera-se apenas a existência do gás natural.



Figura 2: Gás associado e não-associado. Fonte: os autores.



## 1.2 Reservatórios do tipo shale gas

Os reservatórios portadores de hidrocarbonetos podem ser, em função da técnica de produção adotada, classificados em convencionais ou não-convencionais [17]. Os convencionais são aqueles produzindo através de poços verticais. Eles são perfurados perpendicularmente ao acamadamento principal do reservatório. No caso dos não-convencionais, ao invés do uso de um poço vertical convencional é necessário o emprego de poços horizontais e/ou hidraulicamente fraturados, de modo a viabilizar economicamente a produção [2, 4, 32, 34]. Os poços horizontais são perfurados paralelamente ao acamadamento principal, sendo utilizados para ampliar a área de contato entre o poço e o reservatório. Já no fraturamento hidráulico, fluido é injetado a alta pressão no reservatório provocando o aparecimento de fissuras, fraturas, que atuam como canais que facilitam a passagem do fluido do meio poroso para o poço.

Desenvolvimentos industriais, principalmente nas últimas duas décadas, focados na perfuração de poços horizontais hidraulicamente fraturados permitiram a produção em reservatórios não-convencionais de gás natural, tais como os reservatórios do tipo shale gas [7, 23, 37], os quais tem se tornando cada vez mais importantes para a produção de gás no cenário mundial. O shale, ou folhelho, é uma rocha de estrutura laminar (em folhas), composta por argila de granulação muito fina. Apesar de apresentar um baixo armazenamento de fluidos e baixa capacidade de transporte, eles estão sendo explotados devido à sua extensão, à perfuração de poços horizontais hidraulicamente fraturados e à ocorrência de fenômenos físicos específicos, tais como o escorregamento [8, 12, 20] e a adsorção [3, 23, 31].

## 1.3 Análise de testes de pressão

Na análise de testes de pressão em poços (Well Testing Analisys) [16], realiza-se, por exemplo, a produção em um poço sob condições controladas de vazão, medindo-se a sua pressão ao longo do tempo. De posse dessa informação, de parte das características do sistema pocoreservatório e de um modelo físico-matemático para o escoamento, o objetivo dos estudos de análise de testes é o de determinar as propriedades do sistema poçoreservatório desconhecidas. A medida da capacidade de o meio poroso transportar fluidos, associada à permeabilidade absoluta, pode, por exemplo, ser estimada por essa análise [13, 19]. No entanto, nos reservatórios do tipo shale, é mais difícil realizar testes com esse intuito justamente pela demora com que o fluido se movimenta em meios com baixa permeabilidade [31]. Nela, é possível, também, avaliar o potencial de produção das reservas de hidrocarbonetos, dentre outras propriedades, de forma a se realizar a chamada caracterização do sistema poço-reservatório, visando ao planejamento otimizado da produção comercial.

Um teste de pressão é, de fato, um experimento em escala de campo, sujeito ao aparecimento de "ruí-

dos" [21]. Dessa forma, os dados coletados passam por um pós-processamento, de modo a favorecer a sua interpretação acurada. De fato, a análise de testes é essencialmente a proposição de problemas de inversos, nos quais os modelos para o escoamento podem ser analíticos ou numéricos. Nesse sentido, torna-se relevante a modelagem físico-matemática do escoamento para que uma caracterização realística seja obtida. Por exemplo, se por meio da geofísica sabe-se da existência de uma falha selante (estrutura que causa um bloqueio ao escoamento) é necessário que o modelo de escoamento, analítico ou numérico, incorpore também tal ocorrência. Com o passar do tempo, diferentes testes foram desenvolvidos pela indústria para se avaliar diferentes propriedades das configurações de sistemas poço-reservatório [11, 19]:

- Flow-After-Flow (FAF), também conhecido por teste de quatro pontos, no qual o poço é submetido a uma sequência de períodos de vazão (fluxo) crescente, e ao fim , submetido a um período de poço fechado (estática);
- Isócrono, criado para diminuir o tempo do teste e a quantidade de gás produzido, inicia-se como o FAF, porém, é seguido por período de estática até atingir a pressão média do reservatório;
- Isócrono Modificado, que tem o intuito de melhorar o teste isócrono encurtando ainda mais o seu tempo, cuja diferença é a existência de intervalos de fluxo e de estática de mesma duração;
- Testes de Fluxo, nos quais determina-se a produção no poço para uma taxa constante e conhecida, registrando-se a variação da pressão (medida no fundo do poço) ao longo do tempo;
- 5. Testes de Crescimento de Pressão, os quais consistem em usar os dados de pressão no poço, obtidos durante o período de estática, e aplicá-los após o mesmo ter sido submetido a um período de fluxo.

Essa área é tão relevante para a indústria de Óleo & Gás que existem empresas especializadas e dedicadas somente a esse campo de trabalho.

#### 2 Escoamento monofásico de gás em meios porosos

Nesta seção, são apresentadas as correlações usadas na determinação das propriedades do fluido e da rocha, assim como é apresentada a Equação de Difusividade Hidráulica (EDH), para o escoamento de gás natural.

#### 2.1 Propriedades da rocha

No reservatório, o fluido se encontra armazenado na rocha, nos poros, sendo a porosidade efetiva ( $\phi$ ) a propriedade que mede a capacidade do seu armazenamento. Ela



é definida como sendo a relação entre o volume de vazios da formação rochosa (considerando apenas os poros interconectados),  $V_p$ , e o volume total da mesma,  $V_t$  [26],

$$\phi = \frac{V_p}{V_t} \tag{1}$$

e, neste trabalho, considera-se que a formação rochosa possui uma porosidade constante.

Outra propriedade importante do reservatório é a permeabilidade, k. Conforme mencionado, ela fornece uma medida da resistência que o meio poroso impõe ao escoamento do fluido através do mesmo. Ela é chamada de absoluta quando medida no caso do escoamento monofásico de um líquido no interior dele, e trata-se de uma propriedade de rocha exclusivamente.

## 2.2 Propriedades do fluido

No caso do fluido, inicia-se pela densidade,  $\gamma$ , que é a razão entre a massa molecular do gás e a massa molecular do ar,

$$\gamma = \frac{M}{M_{ar}} = \frac{M}{28,96}.$$
(2)

A partir dela e das condições de pressão e de temperatura pode-se definir outras propriedades do gás natural.

No caso de misturas, como é o caso do gás natural, a pressão  $(p_{pc})$  e a temperatura  $(T_{pc})$  pseudo-críticas podem ser obtidas via as seguintes correlações [30]

$$p_{pc} = 756, 8 - 131\gamma - 3, 6\gamma^2 \tag{3}$$

e

$$T_{pc} = 169, 2 - 349, 5\gamma - 74\gamma^2, \tag{4}$$

onde as unidades de pressão e temperatura estão em psi e Rankine, respectivamente.

A seguir, introduz-se a pressão pseudo-reduzida

$$p_{pr} = \frac{p}{p_{pc}} \tag{5}$$

e a temperatura pseudo-reduzida

$$T_{pr} = \frac{T}{T_{pc}},\tag{6}$$

que são utilizadas na determinação do fator de compressibilidade do gás, também chamado de fator de desvio de gás real, Z, um número adimensional.

Dranchuk e Abou-Kassem (1975) [14] propuseram uma equação de estado a 11 coeficientes, a partir dos dados de Standing e Katz (1942) [28], e a extrapolaram para o uso com maiores pressões reduzidas. Ela foi ajustada usando 1.500 pontos e possui um valor médio do erro de 0,486%. O fator de desvio calculado é acurado para as faixas:  $0, 2 \le p_r < 30$  e  $1, 0 < T_r \le 3, 0; p_r < 1, 0$  e  $0, 7 < T_r \le 1, 0$ . Entretanto, ela leva a resultados inadequados para  $T_r = 1, 0$  e  $p_r > 1, 0$ . A sua expressão é dada por [26]

$$Z = 1 + \left(A_1 + \frac{A_2}{T_{pr}} + \frac{A_3}{T_{pr}^3} + \frac{A_4}{T_{pr}^4} + \frac{A_5}{T_{pr}^5}\right)\rho_{pr}$$
$$+ \left(A_6 + \frac{A_7}{T_{pr}} + \frac{A_8}{T_{pr}^2}\right)\rho_{pr}^2 + -A_9\left(\frac{A_7}{T_{pr}} + \frac{A_8}{T_{pr}^2}\right)\rho_{pr}^5$$
$$+ A_{10}\left(1 + A_{11}\rho_{pr}^2\right)\frac{\rho_{pr}^2}{T_{pr}^3}\exp\left(-A_{11}\rho_{pr}^2\right), \tag{7}$$

onde os valores dos coeficientes  ${\cal A}$ podem ser encontrados na Tabela 1 e

$$\rho_{pr} = \frac{0,27p_{pr}}{ZT_{pr}}.\tag{8}$$

Tabela 1 Coefficientes  $A_i$  para a Eq. (7)

$A_i$	Valor
$A_1$	0,3265
$A_2$	-1,0700
$A_3$	-0,5339
$A_4$	0,01569
$A_5$	-0,05165
$A_6$	0,5475
$A_7$	-0,7361
$A_8$	$0,\!1844$
$A_9$	$0,\!1056$
$A_{10}$	$0,\!6134$
$A_{11}$	0,7210

Aqui, a Eq. (7) é resolvida iterativamente usando o método de Newton-Raphson [10]. Conhecido Z, é possível computar a compressibilidade isotérmica do gás,  $c_g$ ,

$$c_g = \frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dp}.$$
(9)

Quanto à avaliação da massa específica,  $\rho,$ utiliza-se uma equação de estado para gases reais,

$$\rho = \frac{pM}{ZRT},\tag{10}$$

onde R é a constante universal dos gases.

Finalmente, para a viscosidade  $(\mu)$  optou-se por uma das correlações de uso mais difundido [22],

$$\mu = B \ 10^{-4} \exp\left(C\rho_{\mu}^{D}\right), \tag{11}$$

onde a viscosidade é dada em centipoise e

$$B = \frac{(9,4+0,02M)T^{1,5}}{209+19M+T},$$
(12)

$$C = 3,5 + \frac{986}{T} + 0,01M,\tag{13}$$

$$D = 2, 4 - 0, 2X, \tag{14}$$

onde

$$\rho_{\mu} = \left(\frac{T^{1,5}}{23,132}\right) \frac{p\gamma}{ZT}.$$
(15)



#### 2.3 A lei de Darcy modificada

A conhecida lei de Darcy clássica foi obtida experimentalmente [26], contudo, atualmente a sua derivação teórica pode ser obtida por métodos matemático rigorosos [35]. Na sua forma diferencial [15],

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla D), \tag{16}$$

onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade de Darcy, g é a magnitude da aceleração da gravidade, D é a profundidade e  $\mathbf{k}$  é o tensor de permeabilidade absoluta do meio poroso. A lei de Darcy é válida estritamente para um conjunto de hipóteses [6], que inclui, por exemplo, escoamento a baixas velocidades. Na literatura, usa-se a denominação de escoamento não-Darcy quando a lei clássica não descreve mais adequadamente o escoamento. Em geral, ela é substituída pela sua versão modificada como, por exemplo,

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{k}_a}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla D), \tag{17}$$

na qual foi introduzido o tensor de permeabilidade aparente,  $\mathbf{k}_a$ . Nele, neste trabalho, são incorporados os efeitos não-Darcy.

Klinkenberg (1941)[20], para incorporar o efeito do escorregamento do gás (deslizamento) em um meio poroso, observou que a permeabilidade aparente poderia ser correlacionada com a pressão,

$$\mathbf{k}_a = \left(1 + \frac{b}{p}\right) \mathbf{k},\tag{18}$$

onde b é o fator de Klinkenberg.

#### 2.4 Equação da Difusividade Hidráulica

O princípio da conservação da massa aplicada ao escoamento em um meio poroso resulta na equação diferencial parcial [15]

$$-\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{q_m}{V_b} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho\phi\right),\tag{19}$$

onde  $q_m$  é um termo fonte que contabiliza a retirada/injeção de massa no reservatório e  $V_b$  é o volume total.

A equação que governa o escoamento de gases através de meios porosos, denominada Equação da Difusividade Hidráulica (EDH), resulta da combinação da equação do balanço de massa, da lei de Darcy modificada e da equação de estado para gases reais [26]. Neste estudo, assume-se as seguintes hipóteses:

- 1. meio poroso homogêneo em termos da permeabilidade absoluta;
- 2. escoamento unidirecional horizontal;
- 3. escoamento isotérmico;
- 4. pequenos gradientes de pressão;

- 5. forças gravitacionais negligenciadas;
- 6. fluidos e rocha não reagentes entre si;
- 7. não há estocagem no poço;
- 8. não há dano à formação;
- 9. ausência de termo fonte/sorvedouro.

Portanto, da lei de Darcy modificada e do balanço de massa tem-se, para o escoamento unidimensional na direção do eixo x,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{k_a}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho).$$
(20)

Logo, de forma similar, obtém-se no caso do fluxo radial horizontal:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho\frac{k_a}{\mu}r\frac{\partial p}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho).$$
(21)

Neste trabalho, obtém-se a solução da Eq. (21) utilizando o conceito de pseudo-pressão [1] para o escoamento de gás natural na presença do efeito de escorregamento. Desta forma, seguindo Wang (2013) [31], ela é dada na forma

$$m(p) = 2 \int_{p_b}^{p} \frac{p'}{\mu Z} \left( 1 + \frac{b}{p} \right) dp',$$
(22)

onde  $p_b$  é uma pressão de referência arbitrária.

Assim, a partir da introdução da pseudo-pressão e considerando-se a porosidade constante, pode-se reescrever a Eq. (21) na forma [31]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial m}{\partial r}\right) = \left(\frac{\phi\mu c_g}{k}\right)\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial m}{\partial t}.$$
(23)

No cálculo de  $\eta$ , Wang (2013) [31] introduziu uma pressão média ponderada pelo volume  $V_i$ , associado à pressão  $p_i$ , que deve ser utilizada no cômputo da permeabilidade aparente,

$$\overline{p} \approx \frac{\sum_{i} (V_i p_i)}{\sum_{i} V_i},\tag{24}$$

sendo que inicialmente  $\overline{p} \approx P_i$  [36], a pressão inicial do sistema. Contudo, Wang (1993) [31] e Wu et al. (1998) [36] não detalharam como deve ser a distribuição dos pontos quando do cálculo dela. Tratar-se-á desse tópico mais adiante.

#### 2.5 Determinação da variação da pseudo-pressão

Prossegue-se com a introdução da definição da variação da pseudo-pressão

$$\Delta m(r,t) = m(P_i) - m(r,t), \qquad (25)$$

de modo que é possível reescrever a equação governante na forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Delta m}{\partial r}\right) = \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial t}\Delta m,$$
(26)



que deve ser resolvida considerando-se a seguinte condição inicial:

$$\Delta m \left( r, t = 0 \right) = 0, \tag{27}$$

sendo a pseudo-pressão, inicialmente, uniforme em todo o reservatório [26].

Aplicando-se a transformada de Laplace [25] à Eq. (26) obtém-se

$$\frac{1}{r}\frac{d\Delta\overline{m}}{dr} + \frac{d^2\Delta\overline{m}}{dr^2} - \frac{s}{\eta}\Delta\overline{m} = 0,$$
(28)

que está na forma da equação modificada de Bessel, cuja solução é dada por [25]

$$\Delta \overline{m}(s) = C_1 I_0 \left( r \sqrt{s/\eta} \right) + C_2 K_0 \left( r \sqrt{s/\eta} \right), \qquad (29)$$

onde  $I_0 \in K_0$  são as funções modificadas de Bessel [25].

Devido à definição da transformada de Laplace [25], para pequenos valores de s têm-se a solução para tempos longos, no domínio real, e para valores altos obtém-se o comportamento para tempos curtos. Deste modo, para o estudo do comportamento da pressão no poço, nos instantes iniciais da produção, uma das metas na análise dos testes de pressão, torna-se necessária a determinação das funções de Bessel para valores altos de s.

## 2.6 Condições de contorno e solução no espaço de Laplace

Busca-se encontrar a solução para o escoamento radial em um reservatório cilíndrico fechado, de raio  $r_e$ , cuja pressão inicial é uniforme. O escoamento se dá em regime transiente, o poço vertical produtor penetra totalmente na formação e a vazão de produção é constante. Portanto, a condição de contorno na sua fronteira externa é dada por

$$\left(\frac{\partial \Delta m}{\partial r}\right)_{r=r_e} = 0, \tag{30}$$

ou ainda, aplicando-se a transformada de Laplace,

$$\left(\frac{\partial \Delta \overline{m}}{\partial r}\right)_{r=r_e} = 0. \tag{31}$$

Portanto, da solução (29) e da condição de contorno (31),

$$\left(\frac{\partial \Delta \overline{m}}{\partial r}\right)_{r=r_e} = C_1 \sqrt{s/\eta} I_1 \left(r_e \sqrt{s/\eta}\right)$$
$$- C_2 \sqrt{s/\eta} K_1 \left(r_e \sqrt{s/\eta}\right) = 0, \qquad (32)$$

onde  $I_1 = I'_0(z)$  e  $K_1 = K'_0(z)$ , ou ainda, reescrevendo-a em função de  $C_2$ ,

$$C_2 = C_1 \left[ \frac{I_1 \left( r_e \sqrt{s/\eta} \right)}{K_1 \left( r_e \sqrt{s/\eta} \right)} \right], \tag{33}$$

que, após substituição na Eq. (29), resulta em

$$\Delta \overline{m}(s) = C_1 I_0 \left( r \sqrt{s/\eta} \right)$$
  
+  $C_1 \left[ \frac{K_0 \left( r \sqrt{s/\eta} \right) I_1 \left( r_e \sqrt{s/\eta} \right)}{K_1 \left( r_e \sqrt{s/\eta} \right)} \right].$  (34)

Na sequência, utiliza-se a condição de contorno interna [19],

$$\left(r\frac{\partial\Delta\overline{m}}{\partial r}\right)_{r=r_w} = -\frac{q_w p_w}{Z_w \pi khs},\tag{35}$$

onde  $q_w$ ,  $p_w \in Z_w$  são, respectivamente, a vazão, a pressão e o fator de compressibilidade do gás no poço, de modo a se determinar a constante  $C_1$ 

$$C_1 = \left(\frac{q_w p_w}{Z_w \pi k h}\right) \left[\frac{K_{r_e}}{s r_w \sqrt{s/\eta} \left(I_{r_e} K_{r_w} - I_{r_w} K_{r_e}\right)}\right],(36)$$

onde

$$K_{r_e} = K_1 \left( r_e \sqrt{s/\eta} \right), \tag{37}$$

$$I_{r_e} = I_1 \left( r_e \sqrt{s/\eta} \right), \tag{38}$$

$$K_{r_w} = K_1 \left( r_w \sqrt{s/\eta} \right), \tag{39}$$

$$I_{r_w} = I_1\left(r_w\sqrt{s/\eta}\right) \tag{40}$$

e, então, introduz-se o valor obtido para  $C_1$  na Eq. (33),

$$C_2 = \left(\frac{q_w p_w}{Z_w \pi k h}\right) \left[\frac{I_{r_e}}{s \, r_w \sqrt{s/\eta} \left(I_{r_e} K_{r_w} - I_{r_w} K_{r_e}\right)}\right].(41)$$

Por último, substitui-se as Eqs. (36) e (41) na Eq. (29) e leva-se em consideração a equação de estado para um gás real,

$$\Delta \overline{m}(s) = \left(\frac{q_0 p_0 T}{T_0 \pi k h}\right) \left[\frac{I_0\left(r\sqrt{s/\eta}\right) K_{r_e} + I_{r_e} K_0\left(r\sqrt{s/\eta}\right)}{s \, r_w \sqrt{s/\eta} \left(I_{r_e} K_{r_w} - I_{r_w} K_{r_e}\right)}\right]$$
(42)

onde  $p_0 \in T_0$  são a pressão e temperatura de referência e a solução no domínio do tempo será obtida mediante uma inversão numérica.

#### 2.7 Inversão Numérica

Na resolução da equação governante, a sua solução foi obtida no domínio de Laplace em termos da variação da pseudo-pressão. Portanto, se faz necessária a utilização de uma técnica de inversão numérica para que ela possa ser determinada no domínio do tempo. Aqui, optou-se



pela aplicação do algoritmo de Stehfest, o qual é muito utilizado na indústria de Óleo & Gás. Ele é dado por [29]

$$\Delta m(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \ \Delta \overline{m} \left( \frac{\ln 2}{t} i \right), \tag{43}$$

sendo N a quantidade de termos no somatório e, para problemas de escoamento, utiliza-se os números pares no intervalo dado por  $6 \le N \le 18$ . Os valores de  $\alpha_i$  variam em função da quantidade de termos, e são calculados via

$$\alpha_{i} = (-1)^{\lfloor (N/2) + i \rfloor} \\ \cdot \sum_{j=(i+1)/2}^{\min(i,N/2)} \frac{j^{N/2} (2j)!}{\lfloor (N/2) - j \rfloor! j! (j-1)! (i-j)! (2j-i)!}.$$
(44)

No código desenvolvido neste trabalho é possível se trabalhar com N = 8, 10, 12, 14 e 16.

#### 3 Resultados Numéricos

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos para o caso do escoamento radial em um reservatório cilíndrico finito, ou seja, para uma jazida na qual a fronteira externa encontra-se fechada.

As variações de pressão no poço mostradas são obtidas em um processo que começa, para uma pressão inicial uniforme, mediante a conversão da pressão em pseudo-pressão usando uma tabela construída previamente via integração numérica. Em seguida, a partir dos valores iniciais de  $\eta$ , obtém-se a solução da equação governante no domínio de Laplace. Finalmente, após a inversão numérica, via o algoritmo de Stehfest, determinase as pseudo-pressões no domínio real e na sequência, via interpolação, as pressões. A partir delas são calculadas as pressões médias necessárias para o cômputo de  $\eta$ . Findo o processo, todo os procedimentos são repetidos para um novo tempo, até que seja alcançado o tempo máximo de simulação  $(t_{max})$ .

## 3.1 Determinação de $\eta$

Para se determinar  $\eta$ , ao longo dos cálculos, é necessário o conhecimento prévio da pressão média, segundo a estratégia proposta por [36] e [31]. Contudo, os autores não indicam o critério que deve ser empregado na distribuição dos pontos para o cálculo da pressão no domínio. Neste trabalho, adotou-se um arranjo comumente utilizado na área de simulação de reservatórios [15] para problemas em geometria cilíndrica, elaborado com base em estudos analíticos para escoamentos em meios porosos. Dessa forma, usa-se as seguintes regras de cálculo, onde nr é o número total de pontos no interior do domínio cilíndrico,

$$\beta_{lg} = \left(\frac{r_e}{r_w}\right)^{nr-1},\tag{45}$$

com os pontos espaçados de acordo com

$$r_{i+1} = \beta_{lg} r_i, \tag{46}$$

onde i = 1, 2, 3, ..., nr - 1 e, para a determinação dos volumes, os valores dos raios são elevados ao quadrado

$$r_{i+1/2}^2 = \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2}{\log_e(r_{i+1}^2/r_i^2)}.$$
(47)

Dessa forma, é garantido que o fluxo através das células, calculados empregando as equações discretas, seja igual àquele determinado pela forma contínua da lei de Darcy [15].

#### 3.2 Derivada de Bourdet

A derivada de Bourdet [9], presente no gráfico diagnóstico, favorece a identificação dos regimes de escoamento no sistema poço-reservatório ao destacar as variações no comportamento da pressão no poço. Na implementação desta derivada, adota-se um esquema a três pontos

$$\left(\frac{d\Delta p}{d\ln\Delta t}\right)_{j} = \frac{\Delta p_{j} - \Delta p_{L}}{\ln\left(\Delta t_{j}/\Delta t_{L}\right)} \frac{\ln\left(\Delta t_{R}/\Delta t_{j}\right)}{\ln\left(\Delta t_{R}/\Delta t_{L}\right)} + \frac{\Delta p_{R} - \Delta p_{j}}{\ln\left(\Delta t_{R}/\Delta t_{j}\right)} \frac{\ln\left(\Delta t_{j}/\Delta t_{L}\right)}{\ln\left(\Delta t_{R}/\Delta t_{L}\right)}, \quad j \ge 2,$$
(48)

onde L = j - 1, e R = j + 1. Assim, no primeiro e no último tempo de registro da pressão não calcula-se a derivada. Aqui, utiliza-se a variação de pressão no poço  $(\Delta p_{wf})$  para a construção da derivada de Bourdet.

#### 3.3 Resultados para a variação de pressão no poço

Para os casos estudados, os diferentes parâmetros e propriedades especificados podem ser encontrados na Tabela 2. Ressalta-se que trabalha-se com um sistema poçoreservatório que possui um limite externo definido (limitação na quantidade de fluido). Os resultados são gerados com um passo de tempo inicial ( $\Delta t_i$ ) que é multiplicado por uma razão de crescimento ( $F_t$ ) até que o número total de passos,  $N_{\Delta t}$ , seja alcançado, sendo mantido constante daí em diante.

A Figura 3 traz os resultados para a variação de  $r_e$ , o raio externo. No gráfico diagnóstico, nota-se as mudanças da derivada que surgem devido à percepção dos efeitos de fronteira (usadas, na prática, em nos testes de pressão para a estimativa do tamanho da jazida, e identificados quando do início da região com uma curva crescente). Quanto maior o  $r_e$ , maior será o tempo necessário para se perceber os seus efeitos. A curvas da derivada de Bourdet e da variação da pressão, para  $r_e=50$  m, convergindo após o aparecimento do efeito de fronteira, trata-se de um comportamento reportado na literatura. Para que ele aparecesse para os demais casos deveria se realizar os cálculos por mais tempo para os reservatórios de raio externo mais longo.



Tabela 2 Parâmetros e propriedades

Parâmetro	Valor
b	$6,8 \ 10^4 \ Pa$
$F_t$	1,1
h	$20,00 {\rm m}$
k	$1,00 \ 10^{-13} \ \mathrm{m}^2$
nr	10
N	10
$N_{\Delta t}$	100
$p_0$	$101,35 \ 10^3 \ Pa$
$P_i$	$2,00 \ 10^7 \ Pa$
$q_0$	$1,00 \ 10^{-3} \ {\rm std} \ {\rm m}^3/{\rm s}$
$r_e$	100 m
$r_w$	$0,10 {\rm m}$
T	$344,44 { m K}$
$T_0$	$288,71 { m K}$
$\gamma_{g}$	$0,\!6$
$\phi^{-}$	$0,\!15$
$\Delta t_i$	10 s



Figura 3: Queda de pressão no poço (linha contínua) e a sua derivada (linha tracejada) em função do tempo, variando o raio externo  $(r_e)$ .

Por outro lado, na Figura 4 (gráfico diagnóstico) mostra a influência da variação da porosidade na percepção do efeito de fronteira. Como os valores de  $\eta$  são inversamente proporcionais a  $\phi$ , quanto maiores forem os seus valores, mais tardiamente serão percebidas as mudanças de pressão na fronteira externa do reservatório. Até que os efeitos de fronteira sejam percebidos, as curvas para as derivadas são coincidentes, sendo que para menor porosidade a pressão muda mais cedo em relação ao valor inicial, quando comparado aos demais valores de porosidade.

Prossegue-se com a apresentação dos resultados correspondentes a diferentes valores da permeabilidade absoluta do reservatório, no gráfico diagnóstico da Figura 5. Nesse caso, os seus valores influenciam diretamente nos de  $\eta$ , ou seja, quanto maiores forem as permeabilidades, maiores também serão os valores de  $\eta$ . Como consequência, o aparecimento dos efeitos de fronteira se dará precocemente em comparação ao caso anterior. Quanto maiores forem os valores de  $\eta$ , mais cedo ocorrerão os efeitos de fronteira. Além disso, após o seu aparecimento, para os diferentes valores de k, as derivadas tendem a colapsar.



Figura 4: Queda de pressão no poço (linha contínua) e a sua derivada (linha tracejada) em função do tempo, variando a porosidade ( $\phi$ ).



Figura 5: Queda de pressão no poço (linha contínua) e a sua derivada (linha tracejada) em função do tempo, variando a permeabilidade absoluta (k).

Por fim, variou-se os valores prescritos da vazão de produção, sendo que as curvas correspondentes podem ser vistas na Figura 6, no gráfico do tipo diagnóstico. Diferentemente dos casos anteriores, não há nenhuma região de concordância entre as curvas das derivadas. Para os maiores valores da vazão, o efeito de fronteira surge ligeiramente antes, quando comparado aos demais casos. Deve-se recordar que  $\eta$  é calculado a partir de um valor médio da pressão no reservatório, que é uma função da vazão de produção. Desta forma, diferentes valores de vazão implicam diferentes valores de  $\eta$  e na correção do efeito do escorregamento (que depende da pressão), influenciando, assim, o momento no qual se dá o surgimento do efeito de fronteira (de forma distinta do caso de óleo com  $\eta$  constante).





Figura 6: Queda de pressão no poço (linha contínua) e a sua derivada (linha tracejada) em função do tempo, variando a vazão de produção  $(q_0)$ .

# 4 Conclusões

A finalidade principal deste trabalho foi a obtenção de soluções analíticas, no contexto da análise dos Testes de Pressão de Poços em poços produtores de gás. Além disso, o código computacional implementado pode ser utilizado na verificação dos resultados obtidos com outros simuladores numéricos, desenvolvidos voltados para a resolução problemas de escoamentos complexos que não possuem solução analítica conhecida, quando testados sob as mesmas hipóteses que as aqui definidas.

Ademais, considerou-se na simulação a noção de pseudo-pressão e o efeito do escorregamento do gás. Os comportamentos qualitativos obtidos estão de acordo com a física dos escoamentos, tendo ocorrido variações consistentes também do ponto de vista qualitativo na análise de sensibilidade. Os gráficos diagnósticos, por exemplo, recuperaram os comportamentos previstos para os regimes de escoamento. Isso pôde ser observado, e.g., quando os intervalos nos quais as curvas da derivada de Bourdet coincidem ou se separam e quando da variação das propriedades (trechos iniciais e finais coincidentes para diferentes valores da porosidade e da permeabilidade absoluta, respectivamente).

Um contribuição relevante que pode ser citada foi a própria estratégia de solução, já que nem todas as etapas de cálculo estão disponíveis na literatura, tais como a distribuição dos pontos para a determinação da pressão média.

Como perspectivas para trabalhos futuros, propõe-se que sejam contemplados os casos de escoamentos na presença de poços hidraulicamente fraturados e a produção usando poços horizontais. Ademais, sugere-se a implementação de outras técnicas de inversão numérica e a incorporação dos efeitos inerciais ou de adsorção. Outras formas de incorporar o efeito de escorregamento podem ser adotadas, como aquela na qual o fator de Klinkenberg não é considerado constante [3].



#### Referências

- R. Al-Hussainy and H. J. Jr. Ramey. Application of real gas flow theory to well testing and deliverability forecasting. <u>Journal of Petroleum Technology</u>, 18(5):637 – 642, 1966.
- [2] J. A. Ali, S. Siddiqui, and H. Dehghanpour. Analyzing the production data of fractured horizontal wells by a linear triple porosity model: Development of analysis equations. <u>Journal of Petroleum Science</u> and Engineering, pages 117–128, 2013.
- [3] W. Ali. Modeling gas production from shales and coal-beds. Master's thesis, Stanford University, 2012.
- [4] K. Aminian and S. Ameri. Analysis of production data from hydraulically fractured horizontal wells in Marcellus shale. <u>AGH Drilling, Oil, Gas</u>, 30(1):37– 45, 2013.
- [5] ANP. Anuário da Agência Nacional de Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis, 2019.
- [6] M. Aziz and A. Settari. <u>Petroleum Reservoir</u> <u>Simulation</u>. Elsevier Applied Science, New York, <u>USA</u>, 1979.
- [7] R. O. Bello and R.A. Wattenbarger. Rate transient analysis in naturally fractured shale gas reservoirs. In <u>CIPC/SPE Annual Gas Technology Symposium</u> <u>Joint Conference.</u>, Calgary, Canada: CIPC/SPE, 16-19 June 2008.
- [8] G. L. C. Bittencourt. Avaliação dos efeitos da pressão efetiva no escoamento de fluidos no meio poroso. Technical report, Universidade Federal Fluminense, Niteroi, 2016.
- [9] D. Bourdet, J. A. Ayoub, and Y. M. Pirard. Use of pressure derivative in well-test interpretation. <u>SPE</u> Formation Evaluation, pages 293–302, 1989.
- [10] R. L. Burden and Faires J. D. <u>Numerical Analysis</u>. Thomson Learning Inc., USA, 8 edition, 2005.
- [11] G. R. Camargo. Estudo dos efeitos turbulentos do escoamento de gás em reservatórios areníticos e suas influências em testes de poços de petróleo. Technical report, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.
- [12] C. L. Chung, M. M. Freitas, G. Souza, and H. P. A. Souto. Numerical reservoir simulation of shale gas in the slip flow regime. In <u>Proceedings do XXXVI</u> <u>Ibero-Latin American Congress on Computational</u> <u>Methods in Engineering</u>, Rio de Janeiro, 22-25 November 2015.



- [13] G. de Souza. <u>Acoplamento Poço-reservatório na</u> <u>Simulação Numérica de Reservatórios de Gás. PhD</u> thesis, Universidade Estadual do Norte Fluminense, Macaé, Brasil, 2013.
- [14] P. M. Dranchuk and J. H. Abou-Kassem. Calculation of Z factors for natural gases using equations of state. <u>Journal of Canadian Petroleum Technology</u>, 14(3):34–36, 1975.
- [15] T. Ertekin, J.H. Abou-Kassem, and G.R. King. <u>Basic Applied Reservoir Simulation</u>. Society of Petroleum Engineers, Richardson, USA, 2001.
- [16] F.-H. Escobar, J.-H. Cantillo, and M.-M. Montealegre. Pressure and pressure derivative analysis for vertical gas and oil wells in stress sensitive homogeneous and naturally fractured formations without type-curve matching. <u>Ciencia, Tecnología y Futuro</u>, 3(3):71 – 84, 2007.
- [17] M. Fioreze, K. F. S. Hedlund, C. Graepin, T. C. N. Silva, F. C. G. Azevedo, and P. D. C. Kemerich. Gás natural: Potencialidades de utilização no Brasil. <u>Revista Eletrônica em Gestão, Educação e</u> Tecnologia Ambiental, 10(10):2251–2265, 2013.
- [18] F. R. Gravina. O projeto manati e o impacto na matriz energética baiana: Uma análise da expansão da oferta de gás natural a partir de 2007. Technical report, Universidade Federal da Bahia, 2008.
- [19] J. P. C. Gripp. Análise de testes de pressão em poços horizontais em reservatórios de baixa permeabilidade portadores de gás. Technical report, Universidade Estadual do Norte Fluminense - UENF, Macaé, 2009.
- [20] L. J. Klinkenberg. The permeability of porous media to liquids and gases. <u>Drilling and Production</u> Practice, 1941.
- [21] F. J. Kuchuk, M. Onur, and F. Hollaender. Pressure Transiente Formation and Well Testing. Elsevier B.V., Amsterdam, Netherlands, 1 edition, 2010.
- [22] A. L. Lee, M. H. Gonzalez, and B. E. Eakin. The viscosity of natural gases. <u>Journal of Petroleum</u> <u>Technology, Transactions of AIME</u>, 18(8):997–1000, 1966.
- [23] S. Merey. Analysis of the effect of experimental adsorption uncertainty on  $CH_4$  production and  $CO_2$ sequestration in dadas shale gas reservoir by numerical simulations. Journal of Petroleum Science and Engineering, 178:1051–1066, 2019.
- [24] A. R. Negreiros. Considerações sobre a indústria do gás natural no brasil. Technical report, Universidade Estadural do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - UENF, Campos dos Goytacazes, 2013.

- [25] E. Ozkan. <u>Applied Mathematics of Fluid Flow in</u> Porous Media. 2008.
- [26] A. J. Rosa, R. S. Carvalho, and J. A. D. Xavier. <u>Engenharia de Reservatórios de Petróleo</u>. Interciência, Rio de Janeiro, Brasil, 2006.
- [27] E. M. Santos, M. T. W. Fagá, C. B. Barufi, and P. L. Poulallion. Gás natural: a construção de uma nova civilização. <u>Estudos Avançados</u>, 21(59):67–90, 2007.
- [28] M. B. Standing and D. L. Katz. Density of natural gases. Trans., AIME, 146:140–149, 1942.
- [29] H. Stehfest. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transform. <u>Communication of the ACM</u>, 1:47–49, 1970.
- [30] R. P. Sutton. Compressibility factors for highmolecular-weight reservoir gases. In <u>SPE Annual</u> <u>Technical Meeting and Exhibition</u>, Las Vegas, 22-25 September 1985.
- [31] C. Wang. Pressure transient analysis of fractured wells in shale reservoirs. Master's thesis, Colorado School of Mines, 2013.
- [32] H. Wang, X. Liao, N. Lu, Z. Cai, C. Liao, and X. Dou. A study on development effect of horizontal well with SRV in unconventional tight oil reservoir. <u>Journal of the Energy Institute</u>, pages 117–128, 2013.
- [33] Waddams, A. L., Atwater, Gordon I., Solomon, Lee H., Riva, Joseph P. and Carruthers, John E.. Natural gas. <u>Encyclopedia Britannica</u>, 2023, https://www.britannica.com/science/natural-gas.
- [34] W. Wendong, M. Shahvali, and S. Yuliang. A semianalytical fractal model for production from tight oil reservoirs with hydraulically fractured horizontal wells. Fuel - Elsevier, 158:613–618, 2015.
- [35] S. Whitaker. <u>The Method of Volume Average.</u> <u>Theory and Applications of Transport in Porous</u> <u>Media. Kluwer Academic Publishers, 1999.</u>
- [36] Y. S. Wu, K. Pruess, and P. Persoff. Gas flow in porous media with Klinkenberg effects. <u>Transport</u> <u>in Porous Media</u>, 32:117?137, 1998.
- [37] L. Zhang, S. Boachao, Z. Yulong, and G.L. Zhao. Review of micro seepage mechanisms in shale gas reservoirs. <u>International Journal of Heat and Mass</u> Transfer, 139:144–179, 2019.

